

58725

Tomus 1.

Fasciculus 4.

# ACTA CYBERNETICA



FORUM CENTRALE PUBLICATIONUM CYBERNETICARUM HUNGARICUM

REDIGIT: L. KALMÁR

COMMISSIO REDACTORUM:

A. ÁDÁM  
F. CSÁKI  
S. CSIBI  
B. DÖMÖLKI  
T. FREY  
B. KREKÓ  
J. LADIK  
K. LISSÁK  
D. MUSZKA  
ZS. NÁRAY

F. OBÁL  
F. PAPP  
A. PRÉKOPA  
J. SZELEZSÁN  
J. SZENTÁGOTHAI  
S. SZÉKELY  
J. SZÉP  
L. VARGA  
T. VÁMOS

SECRETARIUS COMMISSIONIS:

I. BERECSKI

Szeged, 1972

Curat: Universitas Szegediensis de Attila József nominata

Wenn nicht anderes gesagt wird, wird im Folgenden „Zahl“ immer natürliche Zahl (0 inbegriffen) und „Funktion“ zahlentheoretische Funktion bedeuten.

Die verschiedenartigen rekursiven Funktionen kommen aus gewissen Ausgangsfunktionen durch endlichmal verwendete Substitutionen und verschiedenartige Rekursionen zustande.

Das Schema der „primitiven Rekursion“, wodurch der Wert der zu definierenden Funktion  $f$  an einer Stelle mit Hilfe des Wertes von  $f$  an der unmittelbar vorangehenden Stelle angegeben wird, lautet:

$$(D_1) \quad \begin{cases} f(0, a_1, \dots, a_r) = g_0(a_1, \dots, a_r) \\ f(n+1, a_1, \dots, a_r) = g(n, a_1, \dots, a_r, f(n, a_1, \dots, a_r)), \end{cases}$$

wobei  $g_0$  und  $g$  bereits definierte primitiv-rekursive Funktionen sind.

Dies kann auch in folgender „Fallunterscheidungsform“ geschrieben werden:

$$(D'_1) \quad f(n, a_1, \dots, a_r) = \begin{cases} g_0(a_1, \dots, a_r), & \text{falls } n=0 \\ g(n \dot{-} 1, a_1, \dots, a_r, f(n \dot{-} 1, a_1, \dots, a_r)) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei der Wert von  $a \dot{-} b$  für  $a \geq b$  die Differenz  $a-b$ , und sonst 0 bedeutet. Es ist erlaubt, jede Funktion auch als eine Funktion ihrer Argumente und beliebig (endlich) vieler „hinzugenommenen“ Argumente, von denen sie nicht tatsächlich abhängt, zu betrachten.

Ohne genaue Angabe zähle ich auch einige kompliziertere Rekursionsarten auf: 1) die „simultane Rekursion“ für mehrere Funktionen; 2) die „Wertverlaufsrekursion“, wobei zur Berechnung des Funktionswertes an einer Stelle der ganze bisherige Wertverlauf der Funktion herangezogen werden darf; 3) jene Rekursion, wobei auch die (in  $(D_1)$  mit  $a_1, \dots, a_r$  bezeichneten) Parameter nicht unverändert bleiben; sie können sich sogar von der zu definierenden Funktion  $f$  abhängig verändern, wodurch die verwickeltesten Einschachtelungen der  $f$ -Werte im Definitionsschema auftreten können; 4) die „mehrfache Rekursion“, die zugleich nach mehreren Variablen verläuft; 5) die „transfinite Rekursion“, wobei eine Stelle nicht im Sinne der ihrer Größe nach geordneten natürlichen Zahlen als Vorgänger einer anderen Stelle betrachtet wird, sondern im Sinne einer anderen Wohlordnung; 6) Rekursionen, wobei zur eindeutigen Berechnung der Funktionswerte auch an späteren Stellen angenommene Werte der Funktion herangezogen werden; usw.

All diese Rekursionen stimmen darin überein, daß sie aus Definitionsgleichungen bestehen, deren Seiten Ausdrücke sind, die formal aus Zahlzeichen, Variablenzeichen, Zeichen für die zu definierende Funktion und für die Hilfsfunktionen (wie  $f$  bzw.  $g_0$  und  $g$  in  $(D_1)$ ), Kommata und Klammern aufgebaut werden; und an jeder Stelle ergibt sich der Wert der zu definierenden Funktion durch endlichmalige Anwendung von Schritten folgender Art:

a) Das Einsetzen einer Zahl für eine Variable, überall, wo diese Variable in einer Gleichung vorkommt.

b) Das Ersetzen in einer Gleichung eines Teilausdrucks, der auch als eine Seite einer anderen Gleichung auftritt, durch die andere Seite dieser anderen Gleichung.

Die aus einem Definitionsgleichungssystem an jeder Stelle auf diese Weise eindeutig berechenbaren Funktionen werden „allgemein-rekursiv“ genannt; und es ergab

Tomus 1.

---

# ACTA CYBERNETICA

---

FORUM CENTRALE PUBLICATIONUM CYBERNETICARUM HUNGARICUM

---

REDIGIT: L. KALMÁR

COMMISSIO REDACTORUM:

A. ÁDÁM  
F. CSÁKI  
S. CSIBI  
B. DÖMÖLKI  
T. FREY  
B. KREKÓ  
J. LADIK  
K. LISSÁK  
D. MUSZKA  
ZS. NÁRAY

F. OBÁL  
F. PAPP  
A. PRÉKOPA  
J. SZELEZSÁN  
J. SZENTÁGOTHAJ  
S. SZÉKELY  
J. SZÉP  
L. VARGA  
T. VÁMOS

SECRETARIUS COMMISSIONIS:

I. BERECKZI

Szeged, 1972

Curat: Universitas Szegediensis de Attila József nominata



# INDEX

## Tomus I.

Statement of policy .....	1
<i>G. T. Herman</i> : Linear regular languages, Part I. ....	3
<i>Z. M. Hantos</i> : Ein analog-elektrisches Modell zur Simulation der Lymphokinetik .....	13
<i>L. Klukovits</i> : Some measure problems concerning the retrospective sequential functions .....	27
<i>G. T. Herman</i> : Linear regular languages, Part II: The problem of synthesis .....	41
<i>I. Pávó</i> : Generation of the $k$ -trees of a graph .....	57
<i>A. Adám and U. Kling</i> : On the behaviour of some cyclically symmetric networks .....	69
<i>A. Máté and J. Szűcs</i> : On measure-theoretic problems involving retrospective sequential functions .....	81
<i>K. Bellmann und M. Gössel</i> : Versuch einer automaten-theoretischen Beschreibung von Selektionsprozessen .....	93
<i>F. Móricz</i> : On a minimization algorithm for Boolean functions .....	97
<i>A. Adám</i> : On some generalizations of cyclic networks .....	105
<i>D. Muszka and A. Sára</i> : VIDEK: A universal visual input for digital electronic computers .....	121
<i>A. Adám and J. Bagyinszki</i> : On some enumeration questions concerning trees and tree-type networks .....	129
<i>Gy. Révész</i> : Dual pushdown automata and context sensitive grammars .....	147
<i>F. Ferenczy</i> : Замечание к теореме о полноте системы конечных автоматов .....	153
<i>A. Pellionisz</i> : Computer simulation of the information preprocessing in the input of the cerebellar cortex .....	157
<i>F. Forgó</i> : Cutting plane methods for solving nonconvex programming problems .....	171
<i>Annamária G. Varga</i> : A method for chronological ordering of archeological sites .....	193
<i>G. Szalay, L. Molnár, O. Gulyás</i> : Применение алгоритмов обучения в метеорологии для предсказания конвективной активности .....	201
<i>R. Péter</i> : Die prinzipielle Ausschaltbarkeit der rekursiven Prozeduren aus der Programmiersprache Algol 60 .....	219
<i>J. Demetrovics</i> : О мощностях множеств предполных классов в предельных логиках .....	233
<i>B. Papp</i> : Procédé pour déterminer les formes normales minimales des fonctions booléennes, en utilisant les règles de minimisation de la fonction de coût .....	241
<i>P. Dömösi</i> : On the semigroup of automaton mappings with finite alphabet .....	251
<i>W. Kämmerer</i> : Zu den Ungleichungen der Informationstheorie .....	255
<i>D. Muszka und E. Vida</i> : Verkehrskybernetik I: Automatische Bremse .....	257
<i>L. Iliev</i> : Sur des problèmes de formation et de recherche en informatique .....	263
Резюме статей первого тома Acta Cybernetica .....	273
Outlines of the lectures delivered at the colloquium on "Cybernetical and Computing Methods in Medicine and Biology" (December 1971, Szeged, Hungary) .....	283



# Die prinzipielle Ausschaltbarkeit der rekursiven Prozeduren aus der Programmiersprache Algol 60

Von R. PÉTER

1. Da das Wirken eines Computers immer darin besteht, daß in ihm gewisse Daten eingehen, und von diesen abhängig entweder gewisse Ergebnisse von ihm herauskommen, oder sein Ruhezustand nimmermehr wiederkehrt; da ferner sowohl die eingehenden Daten als auch die Folge der herauskommenden Ergebnisse durch natürliche Zahlen kodiert werden können: kann das Wirken eines Computers immer als das Berechnen der Werte einer zahlentheoretischen Funktion betrachtet werden, die an gewissen Stellen auch undefiniert bleiben kann.

Bei der Idealisierung, daß die Speichereinhalte der Computer unbeschränkt sind, kann man beweisen,<sup>1</sup> daß die durch Computer berechenbaren zahlentheoretischen Funktionen mit den „partiell-rekursiven“ Funktionen identisch sind. Die genannte Idealisierung gehört dabei zu jenen, die immer auftauchen, wenn für praktische Fragen umfassende mathematische Theorien gebildet werden; dies wurde auch derart formuliert: „Das Unendliche ist eine bequeme Annäherung für das sehr große Endliche“.

Wird also untersucht, wie die Berechnung der Werte der partiell-rekursiven Funktionen programmiert werden kann, so wird damit eigentlich die Frage der Programmierung sämtlicher durch Computer zu lösenden Probleme untersucht.

Die verschiedenen bekannten Rekursionsarten können in der Programmiersprache Algol 60 (in den weiteren kurz „Algol“ genannt) nur durch „rekursive“ bzw. durch „simultane Prozeduren“ wiedergegeben werden, welche sich nicht unmittelbar auf die Maschinensprache übersetzen lassen. (Unter „nicht unmittelbar“ verstehe ich: nicht ohne einer — in den Späteren geschilderten — „Entwirrung“, die dem „Kellerungsprinzip“ der üblichen „Algol-Compiler“ entspricht.) Es gibt eine Tendenz, derartige Prozeduren von den Programmen auszuschalten. In vorliegender Arbeit zeige ich, daß dies prinzipiell immer möglich ist.

2. Betreffs der Kenntnisse über rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch.<sup>2</sup> Jedoch gebe ich eine kurze Schilderung der Bedeutung der hier gebrauchten Begriffe.

<sup>1</sup> Siehe: J. C. SHEPHERDSON and H. E. STURGIS, *Computability of Recursive Functions*, Journ. of the ACM **10** (1963) S. 217—255, und R. PÉTER, *Programmierung und partiell-rekursive Funktionen*, Acta Math. Ac. Sci. Hung. **14** (1963) S. 373—401.

<sup>2</sup> R. PÉTER, *Recursive Functions* (Budapest—New York—London, 1967; früher deutsch, russisch und chinesisch erschienen).

Wenn nicht anderes gesagt wird, wird im Folgenden „Zahl“ immer natürliche Zahl (0 inbegriffen) und „Funktion“ zahlentheoretische Funktion bedeuten.

Die verschiedenartigen rekursiven Funktionen kommen aus gewissen Ausgangsfunktionen durch endlichmal verwendete Substitutionen und verschiedenartige Rekursionen zustande.

Das Schema der „primitiven Rekursion“, wodurch der Wert der zu definierenden Funktion  $f$  an einer Stelle mit Hilfe des Wertes von  $f$  an der unmittelbar vorangehenden Stelle angegeben wird, lautet:

$$(D_1) \quad \begin{cases} f(0, a_1, \dots, a_r) = g_0(a_1, \dots, a_r) \\ f(n+1, a_1, \dots, a_r) = g(n, a_1, \dots, a_r, f(n, a_1, \dots, a_r)), \end{cases}$$

wobei  $g_0$  und  $g$  bereits definierte primitiv-rekursive Funktionen sind.

Dies kann auch in folgender „Fallunterscheidungsform“ geschrieben werden:

$$(D'_1) \quad f(n, a_1, \dots, a_r) = \begin{cases} g_0(a_1, \dots, a_r), & \text{falls } n=0 \\ g(n-1, a_1, \dots, a_r, f(n-1, a_1, \dots, a_r)) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei der Wert von  $a \dot{-} b$  für  $a \geq b$  die Differenz  $a-b$ , und sonst 0 bedeutet. Es ist erlaubt, jede Funktion auch als eine Funktion ihrer Argumente und beliebig (endlich) vieler „hinzugenommenen“ Argumente, von denen sie nicht tatsächlich abhängt, zu betrachten.

Ohne genaue Angabe zähle ich auch einige kompliziertere Rekursionsarten auf: 1) die „simultane Rekursion“ für mehrere Funktionen; 2) die „Wertverlaufsrekursion“, wobei zur Berechnung des Funktionswertes an einer Stelle der ganze bisherige Wertverlauf der Funktion herangezogen werden darf; 3) jene Rekursion, wobei auch die (in  $(D_1)$  mit  $a_1, \dots, a_r$  bezeichneten) Parameter nicht unverändert bleiben; sie können sich sogar von der zu definierenden Funktion  $f$  abhängig verändern, wodurch die verwickeltesten Einschachtelungen der  $f$ -Werte im Definitionsschema auftreten können; 4) die „mehrfache Rekursion“, die zugleich nach mehreren Variablen verläuft; 5) die „transfinite Rekursion“, wobei eine Stelle nicht im Sinne der ihrer Größe nach geordneten natürlichen Zahlen als Vorgänger einer anderen Stelle betrachtet wird, sondern im Sinne einer anderen Wohlordnung; 6) Rekursionen, wobei zur eindeutigen Berechnung der Funktionswerte auch an späteren Stellen angenommene Werte der Funktion herangezogen werden; usw.

All diese Rekursionen stimmen darin überein, daß sie aus Definitionsgleichungen bestehen, deren Seiten Ausdrücke sind, die formal aus Zahlzeichen, Variablenzeichen, Zeichen für die zu definierende Funktion und für die Hilfsfunktionen (wie  $f$  bzw.  $g_0$  und  $g$  in  $(D_1)$ ), Kommata und Klammern aufgebaut werden; und an jeder Stelle ergibt sich der Wert der zu definierenden Funktion durch endlichmalige Anwendung von Schritten folgender Art:

a) Das Einsetzen einer Zahl für eine Variable, überall, wo diese Variable in einer Gleichung vorkommt.

b) Das Ersetzen in einer Gleichung eines Teilausdrucks, der auch als eine Seite einer anderen Gleichung auftritt, durch die andere Seite dieser anderen Gleichung.

Die aus einem Definitionsgleichungssystem an jeder Stelle auf diese Weise eindeutig berechenbaren Funktionen werden „allgemein-rekursiv“ genannt; und es ergab



sich bis heute keine überall effektiv berechenbare zahlentheoretische Funktion, die nicht unter diesen Begriff fallen würde.

Wird hier die Bedingung „an jeder Stelle“ fallen gelassen, also zugelassen, daß die Funktion nicht überall definiert sei, so gelangt man zur alles bisherige umfassende Klasse der „partiell-rekursiven“ Funktionen.

KLEENE hat bewiesen, daß von primitiv-rekursiven Funktionen ausgehend jede partiell-rekursive Funktion durch endlichmalige Anwendung von Substitutionen und von folgender Operation erhalten werden kann:

$$(Op) \quad \mu_i[g(i, n_1, \dots, n_r)=0],$$

die für gegebene  $n_1, \dots, n_r$  die kleinste Zahl  $i$  liefert, für welche  $g(i, n_1, \dots, n_r)$  verschwindet, falls es ein solches  $i$  überhaupt gibt, und sonst undefiniert ist.

3. Von einer primitiven Rekursion ( $D_1$ ), oder von ihrer dazu besser passenden Form ( $D'_1$ ) kann die folgende Algol-Prozedur für die Berechnung der Werte der Funktion  $f$  abgelesen werden:<sup>3</sup>

**integer procedure**  $f(n, a_1, \dots, a_r)$ ; **value**  $n, a_1, \dots, a_r$ ; **integer**  $n, a_1, \dots, a_r$ ;

$f :=$  **if**  $n=0$  **then**  $g_0(a_1, \dots, a_r)$  **else**  $g(n-1, a_1, \dots, a_r, f(n-1, a_1, \dots, a_r))$ ;

(angenommen, daß Prozeduren für Berechnung der Werte von  $g_0$  und  $g$  bereits zur Verfügung stehen).

Eine derartige Prozedur, welche (in noch unfertigem Zustand) sich selber (hier zur Berechnung von  $f$  an einer anderen Stelle) aufruft, wird im Algol eine „rekursive Prozedur“ genannt. („Simultane Prozeduren“ rufen sich gegenseitig auf.)

Um diese Prozedur für den Computer durchführbar zu machen, muß sie erst entwirrt werden. Es ergibt sich daraus schrittweise:

Ist  $n=0$ , so ist

$$f(n, a_1, \dots, a_r) = g_0(a_1, \dots, a_r),$$

sonst ist

$$g(n \div 1, a_1, \dots, a_r, f(n \div 1, a_1, \dots, a_r))$$

zu berechnen.

Darin: ist  $n \div 1 = 0$ , so ist

$$f(n \div 1, a_1, \dots, a_r) = g_0(a_1, \dots, a_r),$$

also

$$f(n, a_1, \dots, a_r) = g(n \div 1, a_1, \dots, a_r, g_0(a_1, \dots, a_r)),$$

sonst ist

$$g(n \div 2, a_1, \dots, a_r, f(n \div 2, a_1, \dots, a_r))$$

zu berechnen (zufolge  $(n \div 1) \div 1 = n \div 2$ ).

Darin: ist  $n \div 2 = 0$ , so ist

$$f(n \div 2, a_1, \dots, a_r) = g_0(a_1, \dots, a_r),$$

also

$$f(n, a_1, \dots, a_r) = g(n \div 1, a_1, \dots, a_r, g(n \div 2, a_1, \dots, a_r, g_0(a_1, \dots, a_r))),$$

<sup>3</sup> Übersichtlichkeitshalber werde ich immer auch Buchstaben mit unteren Indizes gebrauchen, die aber leicht durch im Algol zugelassene Bezeichnungen ersetzt werden können.

usw. Man sieht, daß sich nach  $n$  Schritten

$$f(n, a_1, \dots, a_r) = g(n \div 1, a_1, \dots, a_r, g(n \div 2, a_1, \dots, a_r, \dots$$

$$\dots, g(2, a_1, \dots, a_r, g(1, a_1, \dots, a_r, g(0, a_1, \dots, a_r, g_0(a_1, \dots, a_r)))) \dots))$$

ergibt.

Erst nach dieser (dem bereits erwähnten „Kellerungsprinzip entsprechenden“) Entwicklung von  $(D'_1)$  kann die Berechnung durch den Computer Schritt für Schritt durchgeführt werden (falls bereits Subrutinen zur Berechnung der Werte von  $g_0$  und  $g$  vorhanden sind: zuerst (im „0-ten Schritt“) die Berechnung von  $g_0(a_1, \dots, a_r)$ , dann mit dem erhaltenen Wert  $w$  die Berechnung von  $g(0, a_1, \dots, a_r, w)$ , dann mit dem erhaltenen neuen Wert  $w$  die Berechnung von  $g(1, a_1, \dots, a_r, w)$ , usw.; wurde im  $i$ -ten Schritt der Wert  $w$  erhalten, dann folgt im  $i+1$ -ten Schritt die Berechnung von  $g(i, a_1, \dots, a_r, w)$ ; und der Wert von  $f(n, a_1, \dots, a_r)$  ist jener Wert  $w$ , der sich im  $n$ -ten Schritt ergibt.

Dies spiegelt sich in folgender Definition einer Hilfsfunktion  $h(n, a_1, \dots, a_r, i, w)$ :

$$h(n, a_1, \dots, a_r, i, w) = \begin{cases} w, & \text{falls } i=n \\ h(n, a_1, \dots, a_r, i+1, g(i, a_1, \dots, a_r, w)) & \text{sonst,} \end{cases}$$

von der ich behaupte, daß sie für die „Ausgangsargumente“

$$n, a_1, \dots, a_r, 0, g_0(a_1, \dots, a_r)$$

den Wert  $f(n, a_1, \dots, a_r)$  annimmt.

4. Ich beweise also den folgenden Satz:

$$(S) \quad h(n, a_1, \dots, a_r, 0, g_0(a_1, \dots, a_r)) = f(n, a_1, \dots, a_r).$$

Es genügt dazu den folgenden Hilfsatz zu beweisen (mit Rücksicht auf

$$g_0(a_1, \dots, a_r) = f(0, a_1, \dots, a_r)):$$

Für  $i \leq n$  gilt

$$(H) \quad h(n, a_1, \dots, a_r, 0, f(0, a_1, \dots, a_r)) = h(n, a_1, \dots, a_r, i, f(i, a_1, \dots, a_r)).$$

Denn für  $i=n$  ergibt sich daraus nach der Definition von  $h$ :

$$h(n, a_1, \dots, a_r, 0, g_0(a_1, \dots, a_r)) = h(n, a_1, \dots, a_r, n, f(n, a_1, \dots, a_r)) = f(n, a_1, \dots, a_r),$$

also der Satz (S).

Beweis des Hilfsatzes:

Für  $n=0$  kann  $i \leq n$  auch nur 0 sein, und so sind die beiden Seiten von (H) identisch.

Für  $n \neq 0$  läßt sich (H) durch Induktion nach  $i$  beweisen.

Für  $i=0$  sind die beiden Seiten von (H) identisch. Angenommen, daß (H) bereits für ein  $i < n$  gilt, vererbt sich dies auch auf  $i+1$ , denn dann läßt sich die

rechte Seite von  $(H)$  nach der Definition von  $h$  und nach  $(D_1)$  derart weiterentwickeln:

$$\begin{aligned} h(n, a_1, \dots, a_r, i, f(i, a_1, \dots, a_r)) &= \\ = h(n, a_1, \dots, a_r, i+1, g(i, a_1, \dots, a_r, f(i, a_1, \dots, a_r))) &= \\ = h(n, a_1, \dots, a_r, i+1, f(i+1, a_1, \dots, a_r)). \end{aligned}$$

Somit ist der Hilfsatz, und damit auch  $(S)$  bewiesen.

5. So ergibt sich zur Berechnung der Werte von  $f(n, a_1, \dots, a_r)$  die folgende neue Definition:

$$(D'_2) \quad \begin{cases} f(n, a_1, \dots, a_r) = h(n, a_1, \dots, a_r, 0, g_0(a_1, \dots, a_r)) \\ h(n, a_1, \dots, a_r, i, w) = \begin{cases} w, & \text{falls } i=n \\ h(n, a_1, \dots, a_r, i+1, g(i, a_1, \dots, a_r, w)) & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Davon läßt sich die folgende Algol-Prozedur ablesen:

**integer procedure**  $f(n, a_1, \dots, a_r)$ ; **value**  $n, a_1, \dots, a_r$ ; **integer**  $n, a_1, \dots, a_r$ ;  
**begin integer**  $i, w$ ;  $i:=0$ ;  $w:=g_0(a_1, \dots, a_r)$ ; **Z: if**  $i=n$  **then go to A**  
**else begin**  $w:=g(i, a_1, \dots, a_r, w)$ ;  $i:=i+1$ ; **go to Z end**; **A: f:=w end**;

wobei die Marke  $A$  auf den Ausgang der Prozedur hinweist, und die Marke  $Z$  auf den Beginn eines Zyklus (das besser durch eine Spirallinie veranschaulicht werden könnte, da man bei jedem Rückkehr zu  $Z$  auch weiterkommt:  $w$  verändert sich;  $i$  wächst um 1, bis es zu  $n$  heranwächst, wo man durch einen Sprung zu  $A$  aus dem Zyklus herauskommt).

Diese ist schon keine „rekursive Prozedur“: durch sie wird unterwegs sie selber nie zur Berechnung eines  $f$ -Wertes aufgerufen.

6. Man sieht unmittelbar, daß die Berechnung der Werte der einfachen Ausgangsfunktionen, die zur Bildung der primitiv-rekursiven Funktionen verwendet werden, im Algol ohne rekursive und simultane Prozeduren programmiert werden kann, und daß sich diese Eigenschaft (NRP) von Funktionen auch auf solche Funktionen vererbt, die aus ihnen durch Substitutionen entstehen. Nun sahen wir, daß sich die Eigenschaft (NRP) auch bei Verwendung von primitiven Rekursionen vererbt. Daher kann nach Nr. 2 die Berechnung der Werte jeder primitiv-rekursiven Funktion im Algol ohne rekursive und simultane Prozeduren programmiert werden.

7. Nun zeige ich, daß sich die Eigenschaft (NRP) auch bei Verwendung der Operation (Op) der Nr. 2 vererbt.

Nehmen wir also an, daß die Funktion  $g$  bereits der Eigenschaft (NRP) ist, und betrachten wir die Funktion

$$(M) \quad f(n_1, \dots, n_r) = \mu_i [g(i, n_1, \dots, n_r) = 0].$$

Bekanntlich kann  $f$  durch

$$(F) \quad f(n_1, \dots, n_r) = h(n_1, \dots, n_r, 0, g(0, n_1, \dots, n_r))$$

definiert werden, wobei die Hilfsfunktion  $h$  durch

$$h(n_1, \dots, n_r, i, a) = \begin{cases} i, & \text{falls } a=0 \\ h(n_1, \dots, n_r, i+1, g(i+1, n_1, \dots, n_r)) & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert wird.

(Bezeichne  $h^*$  die rechte Seite von (F), und betrachten wir die Werte von  $h^*$ , die sich aus der Definition von  $h$  ergeben. Ist bereits  $g(0, n_1, \dots, n_r)=0$ , so ist  $h^*=0$ . Ist bei  $g(0, n_1, \dots, n_r) \neq 0$  bereits  $g(1, n_1, \dots, n_r)=0$ , so ist  $h^*=1$ . Ist bei  $g(0, n_1, \dots, n_r) \neq 0$  und  $g(1, n_1, \dots, n_r) \neq 0$  bereits  $g(2, n_1, \dots, n_r)=0$ , so ist  $h^*=2$ . Usw. Man sieht, daß  $h^*$  das kleinste  $i$  ist, wofür  $g(i, n_1, \dots, n_r)=0$  gilt, falls ein solches  $i$  zu finden ist, und sonst undefiniert bleibt; daß also (F) tatsächlich besteht.)

Von der Definition von  $h$  kann folgende Algol-Prozedur zur Berechnung der Werte von  $h$  abgelesen werden:

```
integer procedure h(n1, ..., nr, i, a); value n1, ..., nr, i, a; integer n1, ..., nr, i, a;
begin Z: if a=0 then go to A else begin i:=i+1; a:=g(i, n1, ..., nr);
go to Z end; A: h:=i end;
```

wobei man aus dem Zyklus nie herauskommt, wenn es kein  $i$  mit  $g(i, n_1, \dots, n_r)=0$  gibt.

Dies ist keine rekursive Prozedur, weder eine Zugehörige simultaner Prozeduren, und nach (F) entsteht  $f$  mittels Substitution aus dem dadurch berechenbaren  $h$ ; demnach ist auch  $f$  der Eigenschaft (NRP).

Nach dem zum Schluß der Nr. 2 hervorgehobenen Ergebnis von KLEENE folgt daraus, daß die Berechnung der (existierenden) Werte jeder partiell-rekursiven Funktion im Algol ohne rekursive und simultane Prozeduren programmiert werden kann.

Nach den Erörterungen der Nr. 1 kann man aus diesen Ergebnissen darauf schließen, daß die Ausschaltung der rekursiven und der simultanen Prozeduren aus den Algol-Programmen prinzipiell immer möglich ist.

8. Zum selben Ergebnis führt auch ein anderer Weg. Bei der Programmierung ist es Brauch den Gedankengang erst mit Skizzen („flow-diagram“) zu veranschaulichen. KALUŽNIN hat für diese Skizzen mit der Benennung „Graphschema“ eine exakte Definition eingeführt; und ich habe bewiesen<sup>4</sup> (auf diesen Beweis werde ich mich als auf (N) berufen), daß sich jede partiell-rekursive Funktion auch durch ein Graphschema definieren läßt. Ich zeige nun, daß von jedem der dabei verwendeten Graphschemata zur Berechnung der Werte der dadurch definierten Funktion eine nicht-rekursive Algol-Prozedur abgelesen werden kann, die auch keine Zugehörige simultaner Prozeduren ist.

Ein solches Graphschema  $\mathbb{G}$ , welches in der Berechnung einer zahlentheoretischen Funktion eine Rolle spielt, ist ein endlicher, zusammenhängender, gerichteter Graph, mit zwei ausgezeichneten Knotenpunkten, kürzer: „Ecken“: in die Ecke  $E$  („Eingang“) läuft keine Kante hinein, und aus der Ecke  $A$  („Ausgang“) läuft keine Kante hinaus. Die Ecken werden teils „mathematische“ teils „logische“ Ecken genannt;

<sup>4</sup> R. PÉTER, *Graphschemata und rekursive Funktionen*, *Dialectica* 12 (1958) S. 373—393.

$A$  gehört unbedingt zu den mathematischen Ecken. Aus jeder mathematischen Ecke außer  $A$  läuft genau eine Kante hinaus; aus jeder logischen Ecke laufen zwei Kanten hinaus, eine mit  $\uparrow$  und eine mit  $\downarrow$  bezeichnete Kante ( $\uparrow$  und  $\downarrow$  sind Zeichen für die logischen Werte „wahr“ bzw. „falsch“). Hineinlaufende Kanten führen zu jeder Ecke außer  $E$ .

Den mathematischen Ecken werden „mathematische“ Funktionen zugeordnet, die für endliche Zahlenfolgen gewisser Länge definiert sind, und auch als Werte endliche Zahlenfolgen gewisser (nicht unbedingt derselben) Länge annehmen. Den logischen Ecken werden für endliche Zahlenfolgen gewisser Länge definierte logische Funktionen zugeordnet.

Seien die Ecken von  $\mathcal{G}$  in einer festgelegten Reihenfolge:

$$B_1 = E, B_2, \dots, B_s = A.$$

Die zur mathematischen Ecke  $B_i$  gehörige Funktion, die  $k_i$ -tupeln  $(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i})$  in  $l_i$ -tupeln  $(w_{i,1}, \dots, w_{i,l_i})$  überführt, werde ich durch  $b_i$  bezeichnen; so gilt:

$$b_i(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}) = (w_{i,1}, \dots, w_{i,l_i}).$$

( $k_i$  werde ich kürzer mit  $k$  bezeichnen.)

Ferner ist jedes Graphschema  $\mathcal{G}$  auch „wirksam“, und berechnet durch sein Wirken folgenderweise (partiell) die Werte einer Funktion:

Das Wirken von  $\mathcal{G}$  wird dadurch in Gang gesetzt, daß als Argument der zu  $E$  gehörigen, für  $k$ -tupeln definierten Funktion eine konkrete Zahlenfolge  $(n_1, \dots, n_k)$  angegeben wird. Diese wird, falls  $E$  eine mathematische Ecke ist, durch die dazu gehörige Funktion in eine bestimmte Zahlenfolge überführt, die dann (für  $E \neq A$ ) längs der einzigen von  $E$  hinauslaufenden Kante in die nächste Ecke weiterläuft, und zum Argument der dieser Ecke zugeordneten Funktion wird. Ist  $E$  eine logische Ecke, so läuft  $(n_1, \dots, n_k)$  entlang der mit  $\uparrow$  oder der mit  $\downarrow$  bezeichneten Kante bis zur nächsten Ecke, je nachdem die zu  $E$  gehörige logische Funktion für  $(n_1, \dots, n_k)$  den Wert  $\uparrow$  oder den Wert  $\downarrow$  annimmt. In beiden Fällen wiederholt sich alles gesagte für jene Ecke statt  $E$ , wohin man angelangt ist. Usw. Es kann vorkommen, daß im Lauf ein Kreisweg unendlich oft beschrieben wird. Falls aber der Lauf in endlich vielen Schritten zur Ecke  $A$  führt (hier muß er stocken, da aus  $A$  keine Kante hinausführt), so ergibt sich hier eindeutig eine Zahlenfolge  $(w_{s,1}, \dots, w_{s,l_s})$  als Wert der zur  $A$  gehörigen Funktion; und wir sagen, daß für die durch  $\mathcal{G}$  partiell definierte Funktion  $f$

$$f(n_1, \dots, n_k) = a(n_1, \dots, n_k) = (w_{s,1}, \dots, w_{s,l_s})$$

gilt. Ist hier  $l_s = 1$ , so werden auf diese Weise die Werte einer zahlentheoretischen Funktion  $f$  berechnet.

9. Der Wirkungslauf von  $\mathcal{G}$  könnte stocken, auch bevor  $A$  erreicht wird, wenn z. B. eine  $k_i$ -tupel in eine Ecke einlaufen würde, zu der eine nicht für  $k_i$ -tupeln definierte Funktion gehört. Wir beschränken uns hier auf solche Graphschemata, in welchen das nicht vorkommen kann, da falls aus einer Ecke  $B_i$  eine Kante in eine Ecke  $B_j$  führt, dann für logisches  $B_i$  immer  $k_j = k_i$ , für mathematisches  $B_i$  immer  $k_j = l_i$  gilt. Diese Eigenschaft ist für die Graphschemata, die im Beweis (N) verwendet wurden, leicht nachzuweisen.

Ferner gehören die in (N) verwendeten Graphschemata unter die „Normalschemata“, in welchen jeder logischen Ecke  $B_i$  eine Relation der Form

$$L_i(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w_{i,1} = w_{i,2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zugeordnet wird, wobei sowohl  $w_{i,1}$  als auch  $w_{i,2}$  eines der  $v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}$  ist; und jeder mathematischen Ecke  $B_i$  eine der gewählten sehr einfachen „Ausgangsfunktionen“, d.h. eine Funktion der Form

$$b_i(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}) = (w_{i,1}, \dots, w_{i,l_i}),$$

wobei jedes der  $w_{i,j}$  ( $1 \leq j \leq l_i$ ) nur 0 oder eines der

$$v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i},$$

oder einer der „Nachfolger“

$$v_{i,k}, v_{i,k} + 1, \dots, v_{i,k} + 1$$

von diesen sein kann.

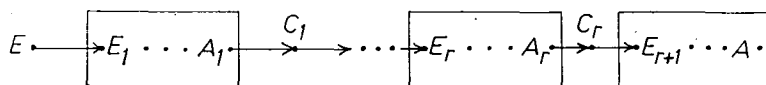
Die Werte  $w_{i,j}$  werde ich in ihrer gegebenen Abhängigkeit von  $v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}$  auch als

$$w_{i,j} = b_{i,j}(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i})$$

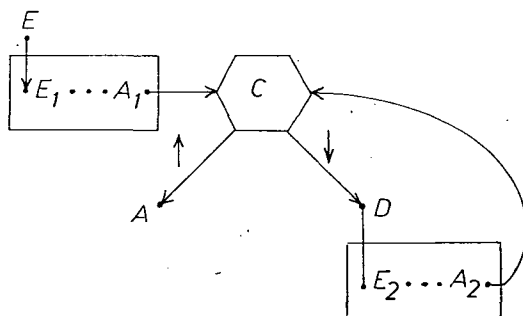
bezeichnen.

Eine Ausgangsfunktion kann durch ein „Ausgangs-Normalschema“ definiert werden, in welchem die Ecken  $E$  und  $A$  zusammenfallen, und dieser einzigen (natürlich mathematischen) Ecke sie selber zugeordnet wird. Auch das leere Graph wird zu den Ausgangs-Normalschemata gerechnet.

Außer den Ausgangs-Normalschemata war jedes der im Beweis (N) verwendeten Normalschemata  $\mathfrak{G}$  der Struktur:



oder



wobei durch jedes der  $\boxed{E_i \dots A_i}$  — die ich die „Blöcke“ von  $\mathfrak{G}$  nennen werde — ein Normalschema ebenfalls einer dieser beiden Strukturen oder ein Ausgangs-normalschema angedeutet wurde. (War dieses leer, so wurde die hinein- und die hinauslaufende Kante zu einer einzigen Kante zusammengefügt.)

10. Von einem im Beweis (N) benutzten Normalschema  $\mathbb{G}$  mit Ecken

$$E = B_1, B_2, \dots, B_s = A$$

und  $l_s = 1$  kann nun eine Algol-Prozedur zur Berechnung der Werte der dadurch definierten  $k = k_1$ -stelligen Funktion abgelesen werden. Jedes Zeichen  $B_i$  dient auch als Marke der ersten jener Anweisungen, die zur Ecke  $B_i$  gehören.

Der Prozedurkopf lautet:

**integer procedure**  $f(n_1, \dots, n_k)$ ; **value**  $n_1, \dots, n_k$ ; **integer**  $n_1, \dots, n_k$ ;

Im Prozedurrumpf werden die weiteren nötigen Variablen durch

**begin integer**  $v_{1,1}, \dots, v_{1,k}, \dots, v_{s,1}, \dots, v_{s,k_s}$ ;

deklariert. Dann folgen, nach

$$v_{1,1} := n_1; \dots; v_{1,k} := n_k;$$

bei  $B_1$  beginnend die zu den Ecken gehörigen Anweisungen.

Ist  $B_i$  für  $i \neq s$  eine mathematische Ecke, woraus eine Kante nach  $B_j$  läuft, so lauten die zu ihr gehörigen Anweisungen (in Betracht genommen, daß nach Annahme  $k_j = l_i$  sein muß):

$B_i$ :  $v_{j,1} := b_{i,1}(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}); \dots; v_{j,k_j} := b_{i,l_i}(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i});$  **go to**  $B_j$ ;

und ist  $B_i$  eine logische Ecke, woraus die mit  $\dagger$  bezeichnete Kante zur Ecke  $B_{j_1}$  führt, die mit  $\dagger$  bezeichnete Kante zu  $B_{j_2}$ , so gehört zu ihr die folgende Anweisung (in Betracht genommen, daß nach Annahme  $k_{j_1} = k_{j_2} = k_i$  sein muß):

$B_i$ : **if**  $b_{i,1}(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}) = b_{i,2}(v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i})$  **then begin**  $v_{j_1,1} := v_{i,1}; \dots; v_{j_1,k_{j_1}} := v_{i,k_i};$   
**go to**  $B_{j_1}$  **end else begin**  $v_{j_2,1} := v_{i,1}; \dots; v_{j_2,k_{j_2}} := v_{i,k_i};$  **go to**  $B_{j_2}$  **end**;

endlich gehört zur Ecke  $B_s = A$  die einzige Anweisung:

$$f := b_{s,1}(v_{s,1}, \dots, v_{s,k_s}) \quad \textbf{end};$$

(Manche „go to“ Anweisungen können dabei überflüssig sein und weggelassen werden; sind aber jedenfalls unschädlich.)

Durch diese an sich (nicht als eine Zugehörige gewisser simultanen Prozeduren) vollkommene, nicht-rekursive Prozedur werden die Werte der durch  $\mathbb{G}$  definierten Funktion  $f$  berechnet.

11. Als Beispiel dafür, wie in der Praxis ein Graphschema aus einer rekursiven Definition abgelesen wird, betrachten wir den parameterlosen Fall für  $g_0 = 0$  der Definition  $(D_2)$  in Nr. 4:

$$(D_2'') \quad \begin{cases} f(n) = h(n, 0, 0) \\ h(n, i, w) = \begin{cases} w, & \text{falls } i = n \\ h(n, i+1, g(i, w)) & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Aus der ersten Zeile der Definition sieht man, daß  $E$  eine mathematische Ecke

sein muß, der die Funktion

$$e(n) = (n, 0, 0)$$

zuzuordnen ist. Auf den gewonnenen Tripel ist ein Verfahren zu verwenden, wodurch die Werte der dreistelligen Funktion  $h$  berechnet werden können. Das beginnt mit einer Fallunterscheidung, je nachdem  $i=n$  oder  $i \neq n$  gilt. Daher muß die aus  $E$  hinauslaufende Kante in eine logische Ecke  $B$  führen, welcher die Relation

$$L(n, i, w) = \begin{cases} \uparrow, & \text{falls } i=n \\ \downarrow & \text{sonst} \end{cases}$$

zugeordnet wird. Für  $i=n$  ergibt die Definition für  $h(n, i, w)$  den Wert  $w$ , also führt aus  $B$  die mit  $\uparrow$  bezeichnete Kante zur Ecke  $A$ , der die Funktion

$$a(n, i, w) = w$$

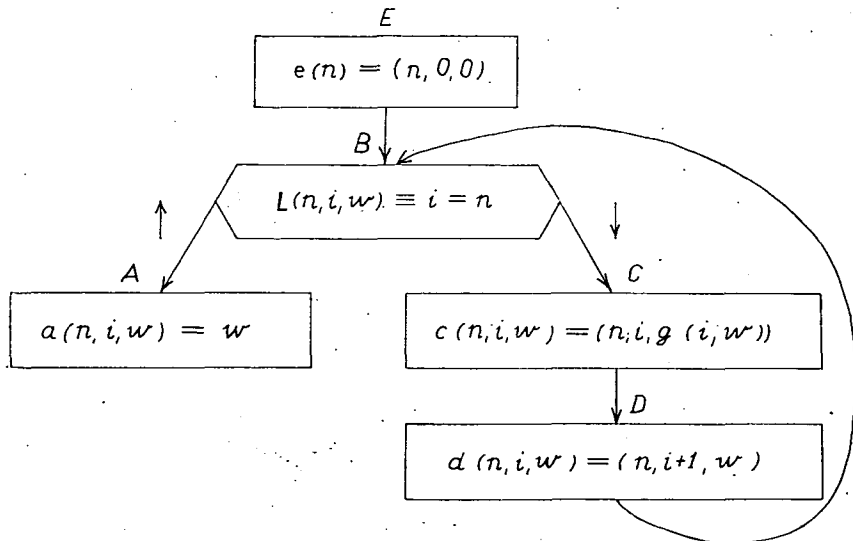
zugeordnet wird. Im Fall  $i \neq n$  hat man erst im Tripel  $(n, i, w)$  von  $w$  auf  $g(i, w)$ , dann von  $i$  auf  $i+1$  zu übergehen, daher führt aus  $B$  die mit  $\downarrow$  bezeichnete Kante zu einer mathematischen Ecke  $C$ , und die aus  $C$  hinauslaufende Kante zu einer mathematischen Ecke  $D$ , wobei man der Ecke  $C$  die Funktion

$$c(n, i, w) = (n, i, g(i, w))$$

und der Ecke  $D$  die Funktion

$$d(n, i, w) = (n, i+1, w)$$

zuordnet. Auf den gewonnenen Tripel ist noch das  $h$ -Werte berechnende Verfahren anzuwenden, das in der Ecke  $B$  beginnt, daher muß die von  $C$  hinauslaufende Kante zu  $B$  zurückführen. Aus all diesen ergibt sich das Graphschema:





Das ist aber wegen des Auftretens von  $g(i, w)$  allgemein kein Normalschema. Kann  $g(i, w)$  bereits durch ein Normalschema  $\mathbb{G}_g$  definiert werden, so kann man aus unserem Graphschema durch „Einschalten“ eines „Modifizierten“ von  $\mathbb{G}_g$  für die Ecke  $C$  ein — ebenfalls die  $f$ -Werte berechnendes — Normalschema  $\mathbb{G}$  erhalten. Dies bedeutet folgendes:

Wir wollen nicht den Wert  $g(i, w)$ , sondern den Tripel

$$(n, i, g(i, w))$$

erhalten. Dieses ergibt sich aus dem derart modifizierten — mit  $\mathbb{G}_g^*$  bezeichneten —  $\mathbb{G}_g$ , daß erstens vor die Ecke  $E_g$  von  $\mathbb{G}_g$  ein neuer — mathematischer — Eingang  $E_g^*$  gesetzt, und dieser Ecke die Funktion

$$e_g^*(n, i, w) = (n, i, i, w)$$

zugeordnet wird, dann jede Folge, die als Argument oder Wert einer der den Ecken von  $\mathbb{G}_g$  zugeordneten Funktionen auftritt, durch Davorsetzen von  $n, i$ , verlängert wird, demzufolge falls der Wert der zum Ausgang  $A_g$  von  $\mathbb{G}_g$  gehörigen Funktion  $z$  war, der Wert der zu  $A_g$  gehörigen modifizierten Funktion sich als  $(n, i, z)$  ergibt; endlich aus unserem Graphschema die Ecke  $C$  samt den zu ihr inzidenten Kanten gelöscht, und dafür eine aus  $B$  zu  $E_g^*$  und eine aus  $A_g$  zu  $D$  führende Kante, ferner zwischen  $E_g^*$  und  $A_g$  das ganze Normalschema  $\mathbb{G}_g^*$  aufgenommen wird. So erhält man zur Berechnung der Werte von  $f$  ein Normalschema, woraus eine Algol-Prozedur wie in Nr. 10 abgelesen werden kann.

12. Könnte das nicht ebenso vom entsprechenden Spezialfall der Definition ( $D_1'$ ) in-Nr. 2 ausgehend erreicht werden?

Dieser lautet:

$$(D_1'') \quad f(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n=0 \\ g(n-1, f(n-1)) & \text{sonst,} \end{cases}$$

das mit einer Fallunterscheidung beginnt, demnach die Ecke  $E$  des dazu gehörigen Graphschemas eine logische Ecke sein muß, welcher die Relation

$$L(n) = \begin{cases} \uparrow, & \text{falls } n=0 \\ \downarrow & \text{sonst} \end{cases}$$

zugeordnet wird. Für  $n=0$  ergibt die Definition für  $f(n)$  den konkreten Wert 0, also führt aus  $B$  die mit  $\uparrow$  bezeichnete Kante zur Ecke  $A$ , der die Funktion

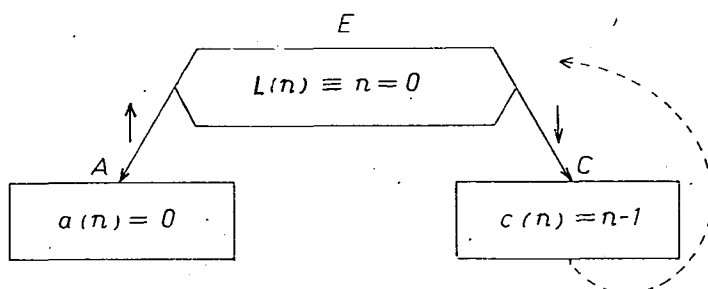
$$a(n)=0$$

zugeordnet wird. Im Fall  $n \neq 0$  hat man erst von  $n$  auf  $n-1$  zu übergehen, (das für  $n \neq 0$  mit  $n-1$  übereinstimmt), daher muß aus  $B$  die mit  $\downarrow$  bezeichnete Kante zu einer mathematischen Ecke  $C$  führen, der die Funktion

$$c(n) = n-1$$

zugeordnet wird.

Nach den Bisherigen muß das Graphschema so beginnen:



Hier scheitert aber unser Vorhaben. Denn nach  $(D_1')$  wäre zunächst auf das gewonnene  $n-1$  selbst das  $f$ -Werte berechnende Verfahren anzuwenden, das in der Ecke  $E$  beginnt. Würde aber die von  $C$  hinauslaufende Kante zu  $E$  zurückführen, dann würde mit  $n-1$  dasselbe geschehen, was vorhin mit  $n$ ; so würde sich  $n-2$  in  $C$ , und nachher in  $E$  ergeben, dann ebenso  $n-3$ , usw., wobei die Funktion  $g$  garnicht zu Worte kommen könnte, als ob  $f$  von  $g$  garnicht abhängig wäre. Nach  $n$  Schritten würde 0 in  $E$  eintreffen, wovon wir schon sahen, daß dies als Wert der durch das Graphschema berechneten Funktion 0 liefert. Diese Funktion wäre also nicht unser  $f(n)$ , sondern die Konstante 0.

So ist in Hinsicht der Programmierung die Verwendung des Definitionsschemas  $(D_2')$  viel einfacher als des Definitionsschemas  $(D_1')$ ; obwohl das letztere nur eine andere Aufzeichnung der primitiven Rekursion  $(D_1)$  ist.

### 13. Woran liegt das?

Jedenfalls ist auch  $(D_2')$  ein Spezialfall der partiellen Rekursion, da es auch auf Definitionsgleichungssystem-Form gebracht werden kann: wird die charakteristische Funktion der Relation  $i=n$ , die für  $i=n$  den Wert 1, und für  $i \neq n$  den Wert 0 annimmt, durch  $eq(i, n)$  bezeichnet, so kann  $(D_2')$  in folgender Form aufgezeichnet werden:

$$(D_2) \quad \begin{cases} f(n, a_1, \dots, a_r) = h(n, a_1, \dots, a_r, 0, g_0(a_1, \dots, a_r)) \\ h(n, a_1, \dots, a_r, i, w) = eq(i, n) \cdot w + |1 - eq(i, n)| \cdot \\ \quad \cdot h(n, a_1, \dots, a_r, i+1, g(i, a_1, \dots, a_r, w)). \end{cases}$$

(Dabei sind  $a+b$ ,  $a \cdot b$ ,  $|a-b|$  und  $eq(a, b)$  primitiv-rekursive Funktionen.)

Es ist in Augen springend, daß diese Definition ein komplizierterer Spezialfall der allgemeinen Rekursion ist, als die primitive Rekursion. (Eine allgemeine Rekursion ist es, obwohl  $h$  für  $i > n$  nicht definiert ist; denn solche  $h$ -Werte werden zur Berechnung von  $f$ -Werten nicht gebraucht. Man hätte aber  $h$  auch für  $i > n$  als  $w$  definieren können.) Es ist aber auch prinzipiell komplizierter. Es wird dadurch der Wert von  $h$  an einer Stelle

$$(n, a_1, \dots, a_r, i, w)$$

mit Verwendung eines  $h$ -Wertes an solcher Stelle berechnet, die hinsichtlich keiner der Argumente als vorherig betrachtet werden kann:  $n, a_1, \dots, a_r$  sind die selben geblieben,  $i$  hat sich um 1 erhöht, an Stelle von  $w$  ist

$$g(i, a_1, \dots, a_r, w)$$

getreten, daß allgemein nicht kleiner als  $w$  ist. Dennoch hätte man in Hinsicht der Programmierung diese verwickelte Definition primitiv zu nennen. — Hier scheint sich die zu Beginn der Verbreitung der Computer erstandene Vermutung von L. KALMÁR zu bestätigen, daß dies eine Änderung unserer Vorstellung darüber, was in der Mathematik „einfach“ ist, mit sich bringen kann. (Er vermutete sogar, daß in den zukünftigen untersten Schulklassen die Mathematikunterricht nicht mit den 4 Spezies, sondern mit solchen Operationen beginnen wird, die hinsichtlich der Maschinen den Vorzug haben.) —

Es kann aber nicht sein, daß sich unabhängig von der Programmierung gar nichts an den Definitionsschemata zeige, worin  $(D_2)$  einfacher als  $(D_1)$  ist. Betrachte man ihre Fallunterscheidungsformen  $(D'_2)$  bzw.  $(D'_1)$ . In beiden kommt es vor, daß der Wert von  $f$  oder  $h$  an einer Stelle mit Hilfe eines  $f$ -bzw.  $h$ -Wertes an einer anderen Stelle angegeben wird (den letzteren werde ich kurz den „verwendeten  $f$ - (bzw.  $h$ -) Wert“ nennen); doch in  $(D'_2)$  nicht als ein Argument einer anderen Funktion, wie in  $(D'_1)$  als ein Argument von  $g$ . Dies ist das Entscheidende (in Nr. 12 war der springende Punkt, daß  $g$  garnicht zu Worte kommen konnte), nicht das, wie die Argumente des verwendeten  $f$ - (bzw.  $h$ -) Wertes beschaffen sind, woran die Primitivität der Rekursion bisher gelegen ist (nämlich daran, daß der verwendete  $f$ - (bzw.  $h$ -) Wert zur unmittelbar vorangehenden Stelle gehören mußte).

So könnte hinsichtlich der Programmierung jene Definition durch Fallunterscheidung eine primitive Rekursion genannt werden, wodurch der Wert der zu definierenden Funktion  $f$  an einer beliebigen Stelle in jedem Fall entweder unabhängig von  $f$ , oder als ein Wert von  $f$  an einer anderen Stelle angegeben wird, wo von dieser anderen Stelle nur soviel verlangt wird, daß sie von der ursprünglichen Stelle auf bereits bekannter Weise abhängen soll.

14. Würde man aber sagen, daß nun jene Funktionen primitiv-rekursiv genannt werden sollen, die von Ausgangsfunktionen ausgehend durch endlichmaliges Verwenden von Substitutionen und von eben beschriebenen neuartigen primitiven Rekursionen aufgebaut werden können, so käme man zum verblüffenden Ergebnis, daß jede partiell-rekursive Funktion primitiv-rekursiv ist! Denn die partiell-rekursiven Funktionen entstehen aus primitiv-rekursiven Funktionen (nebst Substitutionen) durch Verwendung der in Nr. 2 geschilderten Operation

$$f(n_1, \dots, n_r) = \mu_i [g(i, n_1, \dots, n_r) = 0],$$

und von diesem  $f$  wurde in Nr. 7 erwähnt, daß es durch die Substitution

$$f(n_1, \dots, n_r) = h(n_1, \dots, n_r, 0, g(0, n_1, \dots, n_r))$$

aus der Hilfsfunktion  $h$  entsteht, welche durch die neuartige primitive Rekursion

$$h(n_1, \dots, n_r, i, a) = \begin{cases} i, & \text{falls } a = 0 \\ h(n_1, \dots, n_r, i+1, g(i+1, n_1, \dots, n_r)) & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert werden kann.

Wie man sieht, ist es garnicht so einfach zu entscheiden, was in der Mathematik einfach ist.



## О мощностях множеств предполных классов в предельных логиках

J. DEMETROVICS

В настоящей работе изучается вопрос о числе предполных классов в различных предельных логиках [1].

Из определения предельной логики сразу следует, что любая предельная логика содержит не более чем континуум предполных классов. Показано, что для любого кардинального числа  $\alpha$ , равного любому натуральному числу  $\aleph_0$  или  $\beth_1$ , существует предельная логика, мощность множества всех различных предполных классов которой равна  $\alpha$ . Большинство понятий, используемых нами, взято из работы [1].

Автор выражает благодарность С. В. Яблонскому, под чьим руководством выполнена работа.

1°.  $P_{\aleph_0}^*$  обозначает множество всех функций, переменные в которых определены на множестве  $E_{\aleph_0} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , и сами функции принимают значения из того же множества.

*Определение.* Множество функций  $\mathfrak{D} = \{f(x_1, \dots, x_n)\}$  гомоморфно отображается в множество функций  $\mathfrak{U} = \{g(y_1, \dots, y_n)\}$ , если

1. существует взаимно однозначное соответствие между переменными:  $x_i \leftrightarrow y_i$ ,

2. каждой функции  $f$  из  $\mathfrak{D}$  однозначно отвечает функция  $g$  из  $\mathfrak{U}$ , зависящая от соответствующих переменных,

3. всякой суперпозиции функций из  $\mathfrak{D}$ , принадлежащей  $\mathfrak{D}$ , отвечает аналогичная суперпозиция из соответствующих функций системы  $\mathfrak{U}$ , которая также принадлежит  $\mathfrak{U}$ .

Если при этом отображении гомоморфизм имеет место в обе стороны, то говорят, что системы  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{D}$  изоморфны.

*Определение.* Замкнутый класс  $P_{\aleph_0} \subset P_{\aleph_0}^*$  называется предельной логикой, если

1.  $P_{\aleph_0}$  состоит из счётного числа функций,

2.  $P_{\aleph_0}$  содержит гомоморфные прообразы  $k$ -значных логик  $P_k$ , ( $k \geq 2$ ), т. е. для всякого натурального числа  $k$ , существует множество  $A_k$  из  $P_{\aleph_0}$  которое гомоморфно отображается на множество всех функций  $k$ -значной логики.

Обычным образом [2] определяются понятия суперпозиции функций из  $P_{x_0}$  и замыкания  $[\mathfrak{M}]$  множества функций

$$\mathfrak{M} \subseteq P_{x_0}.$$

Пусть  $\mathfrak{M}$  — подмножество множества  $\mathfrak{N}$ , где

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq P_{x_0}.$$

*Определение.* Подмножество  $\mathfrak{M}$  из  $\mathfrak{N}$  называется полной системой в  $\mathfrak{N}$  если  $[\mathfrak{M}] \supseteq \mathfrak{N}$ .

*Определение.* Класс функций  $\mathfrak{M}$ , принадлежащий замкнутому классу  $\mathfrak{N}$  из  $P_{x_0}$  называется предполным классом в  $\mathfrak{N}$ , если  $\mathfrak{M}$  представляет неполную в  $\mathfrak{N}$  систему, но присоединение любой функции  $f \in \mathfrak{N}$  и  $f \notin \mathfrak{M}$  обращает  $\mathfrak{M}$  полную в  $\mathfrak{N}$  систему.

2°. Поясним коротко общую идею конструкций, проводимых ниже. Для каждой мощности мы будем подбирать некоторые замкнутые классы функций  $k$ -значных логик, обладающие специальными свойствами. Счётные семейства таких классов мы будем «вкладывать» в предельные логики таким образом, чтобы нужные нам свойства переносились на эти логики. В частности, в лемме 1 удалось использовать классы построенные в [3].

*Лемма 1.* Существует предельная логика  $P$ , в которой нет предполных классов.

*Доказательство.* Рассмотрим следующее разбиение множества  $E_{x_0}$ :

$$E_{x_0} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j, \quad \varepsilon_1 = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{и}$$

$$\varepsilon_{j+1} = \left\{ \frac{j(j+1)}{2} + 3, \frac{j(j+1)}{2} + 4, \dots, \frac{j(j+1)}{2} + j + 3 \right\} \quad j=1, 2, 3, \dots$$

Определим функцию  $\varphi_k^n(x_1, \dots, x_n)$ , где  $k=2, 3, \dots$ ;  $n=1, 2, \dots$ , областью определения которой является множество  $\underbrace{\varepsilon_k \times \varepsilon_k \times \varepsilon_k \times \dots \times \varepsilon_k}_{n \text{ раз}}$ , а областью значений — множество  $\varepsilon_k$

$$\varphi_k^n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \max(x_1, \dots, x_n) + 1, & \text{если ни одна из переменных не равна} \\ & x_i \neq \frac{(k-1)k}{2} + k + 2; \\ \frac{(k-1)k}{2} + 3, & \text{если хотя бы одни } x_i \\ & x_i = \frac{(k-1)k}{2} + k + 2. \end{cases}^1$$

<sup>1</sup> Нетрудно видеть, что  $\varphi_k^n(x_1, \dots, x_n)$  есть так называемая функция Вебба в  $k$ -значной логике.

Используя функции  $\varphi_k^n(x_1, \dots, x_n)$ , определим функцию  $f_k^n(x_1, \dots, x_n) \in P_{\varepsilon_0}$

$$f_k^n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \varphi_k^n(x_1, \dots, x_n), & \text{если } (x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n) \in \varepsilon_k \times \dots \times \varepsilon_k; \\ 1, & \text{если } x_1 = x_2 = \dots = x_i = \dots = x_n = 3; \\ 0, & \text{при всех других значениях } x_1, x_2, \dots, x_n. \end{cases}$$

Для примера приведем таблицы функций  $f_2^2(x_1, x_2)$  и  $f_3^2(x_1, x_2)$ :

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0			
2	0	0	0	0			0
3	0	0	0	1			
4					5	4	
5					4	4	
6		0					0

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0						
1	0	0	0	0						
2	0	0	0	0						
3	0	0	0	1						0
4					0	0				
5					0	0				
6							7	8	6	
7				0			8	8	6	
8							6	6	6	
9										0

Через  $P$  обозначим замыкание множества  $\{f_k^n(x_1, \dots, x_n)\}$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ ;  $k=2, 3, 4, \dots$ .

Множество функций  $P$  разбиваем на бесконечное число непересекающихся классов  $P = \bigcup_{k=2}^{\infty} P_k$ , где  $P_k = \{f_k^1, f_k^2, \dots, f_k^m, \dots\}$ . Обозначим через  $P_k^n$ ,  $n \geq 1$ , множество функций  $P_k^n = \{f_k^1, f_k^2, \dots, f_k^n\}$ .

Покажем, что  $P$  предельная логика. В самом деле, функция  $\varphi_k^n(x_1, \dots, x_n)$  образует базис в  $P_{\varepsilon_k}$ .<sup>2</sup> Нетрудно видеть, что отображение  $f_k^n \rightarrow \varphi_k^n$  нужный нам гомоморфизм.

#### Замечания

- а) суперпозиция  $f_k^n(x_1, \dots, x_n) \in P_k^n$  даёт нам любую функцию  $f_k^m(x_1, \dots, x_m) \in P_k^m$ , где  $m \leq n$ ;
- б) суперпозиция  $f_k^n(x_1, \dots, x_n) \in P_k^n$  не даёт нам функции  $f_k^{n+l}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+l})$ , где  $l \geq 1$ ;
- в) суперпозиция  $f_k^n(x_1, \dots, x_n) \in P_k^n$  не даёт нам никакой функции  $f_{k+l}^h(x_1, \dots, x_h) \in P_{k+l}$ ;
- г) не существует функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P$  такая, что  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{k_1}$  и  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{k_2}$ , где  $k_1 \neq k_2$ .

<sup>2</sup> Через  $P_{\varepsilon_k}$  здесь и в дальнейшем мы будем обозначать множество всех функций  $k$ -значной логики определенное на наборах из  $\varepsilon_k$  и принимающие значения в  $\varepsilon_k$ .

Очевидно, что классы  $P, P_k, P_k^n$  являются замкнутыми классами, причем  $P_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^n$ . Покажем, что для любого  $k$  в  $P_k$  нет предполных классов.

Пусть в замкнутом классе  $P_k$  есть некоторый предполный класс  $\tilde{P}_k$ , т. е. такой, что  $P_k \neq [\tilde{P}_k]$  и  $P_k = [\tilde{P}_k \cup \tilde{f}]$ . Рассмотрим следующие случаи

- а)  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \notin \tilde{P}_k, \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ ,  
 б)  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \notin \tilde{P}_k, \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \in P_{k_1}$ , где  $k \neq k_1$ .

а) Тогда из нашего замечания следует, что для любого  $l, l \geq 1$ , функции  $f_k^{n+l}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+l})$  также не входят в класс  $\tilde{P}_k$ . Но по предположению о предполноте  $\tilde{P}_k$ , для любого  $l$   $f_k^{n+l} \subset [\tilde{P}_k \cup \tilde{f}]$ . Нетрудно видеть, что тогда  $\tilde{P}_k$  должен содержать некоторую функцию  $\eta$  от  $n+l$  переменных, и  $\eta \neq f_k^{n+l}$ . Ясно, однако, что любая такая функция обладает следующим свойством: на  $\varepsilon_1$   $\eta \equiv 0$ . Но  $f_k^{n+l}$  не может быть получена суперпозицией с участием такой функции. Это противоречит предположению.

б) Очевидно.

Сейчас покажем, что в предельной логике  $P, P = \bigcup_{k=2}^{\infty} P_k$ , нет ни одного предполного класса. Пусть в  $P$  есть некоторый предполный класс  $\tilde{P}$ . Тогда существует  $P'_k$  такая, что  $P'_k \subset P_k \subset P$  и  $[P'_k] \neq [P_k]$ . Но из замечания и из предыдущего рассуждения вытекает, что даже  $P_k$  не получим, т. е.  $[\tilde{f} \cup \tilde{P}] \not\supset P_k$ .

Итак наша лемма доказана.

**Лемма 2.** Для любого натурального числа  $k$  существует замкнутый класс  $T_k$ , в котором имеется точно  $k$  предполных классов.

**Доказательство.** Рассмотрим следующее разбиение множества  $E_{x_0}$ :

$$E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j, \quad \text{где } \varepsilon_0 = \{0, 1, 2, \dots, 7\},$$

$$\varepsilon_i = \{4(i+1), 4(i+1)+1, 4(i+1)+2, 4(i+1)+3\}, \quad \text{где } i=1, 2, \dots$$

Определим функции  $t_j(x) \in P_{x_0}$ , следующим образом

$$t_j(x) = \begin{cases} 4(j+1)+2, & \text{если } x = 4(j+1); \\ 4(j+1), & \text{если } x = 4(j+1)+2; \\ 0, & \text{при всех других значениях } x. \end{cases}$$

Через  $T_k$  обозначим замыкание множества  $\{t_1(x), \dots, t_k(x)\}$ . Покажем, что в  $T_k$  имеется ровно  $k$  предполных классов. В  $T_k$  входят только следующие функции

$$t_0^0(x) \equiv 0, \quad t_i(x), \quad t_i^0(x), \quad \text{где}$$

$$t_i^0(x) = \begin{cases} 4(i+1), & \text{если } x = 4(i+1); \\ 4(i+1)+2, & \text{если } x = 4(i+1)+2; \\ 0, & \text{при всех других значениях } x. \end{cases}$$



Рассмотрим замкнутый подкласс  $\tilde{T}_i \subset T_k$ ,  $\tilde{T}_i = [t_0^0(x), t_j^0(x), t_i(x)]$  где  $j=1, \dots, k$ ;  $i=1, \dots, i-1, i+1, \dots, k$ . Ясно, что для любого  $i$ ,  $\tilde{T}_i$  предполный класс в  $T_k$ . Очевидно также, что в  $T_k$  нет других предполных классов.

**Лемма 3.** Для любого натурального числа  $k$  существует предельная логика  $\mathfrak{A}$ , в которой имеется ровно  $k$  предполных классов.

*Доказательство.* Рассмотрим следующее разбиение множества  $E_{x_0}$ :

$$E_{x_0} = M_0 \cup M_1, \quad M_0 = \{0, 1, 3, \dots, 2r+1, \dots\}, \quad M_1 = \{2, 4, 6, \dots, 2r, \dots\}.$$

На этом множестве определим функции  $g_k^n(x_1, \dots, x_n)$  следующим образом

$$g_k^n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 2f_k^n\left(\frac{e_1+1}{2}, \dots, \frac{e_n+1}{2}\right) - 1, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n) \in \\ & \in (M_0 \setminus \{0\}) \times \dots \times (M_0 \setminus \{0\}); \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $n=1, 2, 3, \dots$ ;  $k=2, 3, 4, \dots$  и  $f_k^n(x_1, \dots, x_n)$  та функция, которая была определена в лемме 1. Здесь под  $x \div y$  понимается, как обычно, арифметическая разность. Нетрудно видеть, что множество функций  $\mathfrak{A}' = [g_k^n(x_1, \dots, x_n)]$  является предельной логикой без предполных классов. Мы «перенесли» предельную логику  $P = [f_k^n(x_1, \dots, x_n)]$  из леммы 1 с множества  $E_{x_0}$  на множество  $M_0 \setminus \{0\}$ . Возьмем ещё замкнутый класс  $T_k$ , построенный в предыдущей лемме. Очевидно, что множество функций  $\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}' \cup T_k]$  есть предельная логика, которая удовлетворяет условию леммы.

**Лемма 4.** Существует предельная логика  $\mathfrak{D}$ , в которой имеется счётное число предполных классов.

*Доказательство.* Рассмотрим следующее разбиение  $E_{x_0}$ :

$$E_{x_0} = \bigcup_{j=2}^{\infty} \varepsilon_j, \quad \text{где } \varepsilon_{j+1} = \left\{ \frac{j(j+1)}{2} - 1, \frac{j(j+1)}{2}, \dots, \frac{j(j+1)}{2} + j - 1 \right\}, \quad j=1, 2, \dots$$

Пусть  $\varphi'_k(x, y)$  — функция Вебба из  $P_{\varepsilon_k}$  ( $k \geq 2$ ).

Определим функцию  $\varphi_k(x, y) \in P_{x_0}$ ,

$$\varphi_k(x, y) = \begin{cases} \varphi'_k(x, y), & \text{если } (x, y) = (e_1, e_2) \in \varepsilon_k \times \varepsilon_k; \\ 0, & \text{если } (x, y) = (e_1, e_2) \notin \varepsilon_k \times \varepsilon_k. \end{cases}$$

Через  $\mathfrak{D}$  обозначим замыкание множества  $\{\varphi_k(x, y)\}$ . Очевидно, что множество функций  $\mathfrak{D}$  является предельной логикой.

Докажем предварительно следующее утверждение:

Для того, чтобы замкнутый класс  $\tilde{\mathfrak{D}}$  был предполным классом в предельной логике  $\mathfrak{D}$ , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое  $m$ , что  $\tilde{\mathfrak{D}}$  в  $m$ -ом ящике был предполным в смысле  $m$ -значной логики, и при любом  $k \neq m$  был бы полным в  $k$ -ом ящике в смысле  $k$ -значной логики.

Достаточность этого условия очевидна.

Необходимость. Если класс  $\tilde{\mathfrak{D}}$  предполный в  $m$ -ом ящике, предполный также ещё в каком-то ящике, то из построения ясно, что существует такая функция  $g(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{D}$ , что  $g(x_1, \dots, x_n) \notin \tilde{\mathfrak{D}}$ , и  $[[g(x_1, \dots, x_n)] \cup \tilde{\mathfrak{D}}] \neq \mathfrak{D}$ , т. е.  $\tilde{\mathfrak{D}}$  не есть предполный в  $\mathfrak{D}$  класс. Аналогично доказывается тот случай, когда  $\tilde{\mathfrak{D}}$  в  $m$ -ом ящике не является ни полным, ни предполным в смысле  $m$ -значной логики.

Подсчитаем теперь число предполных классов в предельной логике  $\mathfrak{D}$ . Известно, что число  $\alpha_k$  предполных классов в  $k$ -значной логике  $P_k$ -конечно. Поэтому из доказанного утверждения сразу вытекает, что число предполных классов в предельной логике  $\mathfrak{D}$  не более чем счетно. С другой стороны, ясно, что это число бесконечно. Лемма доказана.

*Лемма 5.* Существует предельная логика  $\mathcal{Q}$ , в которой имеется континуум различных предполных классов.

*Доказательство.* Пусть  $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ ,  $k \geq 2$ .

Возьмем функции  $\psi_k(x, y) \in P_{\aleph_0}$  определяемые следующим образом:

$$\psi_k(x, y) = \begin{cases} \max(e_1, e_2) + 1 \pmod{k}, & \text{если } (x, y) = (e_1, e_2) \in E_k \times E_k; \\ 0, & \text{если } (x, y) = (e_1, e_2) \notin E_k \times E_k. \end{cases}$$

Через  $\mathcal{Q}$  обозначим замыкание множества  $\bigcup_{k=2}^{\infty} [\psi_k(x, y)]$ . Легко проверить, что множество  $\mathcal{Q}$  является предельной логикой.

Покажем, что уже мощность множества всех различных предполных классов монотонной функции в предельной логике  $\mathcal{Q}$  равна континууму.

Пусть  $\gamma$  — бесконечная последовательность натуральных чисел, такая, что её начальный отрезок длины  $2k$  содержит все целые числа от 0 до  $2k-1$ . Каждой последовательности однозначно можно поставить в соответствие бесконечную последовательность  $\beta$ , состоящую из 0 и 1;  $k$ -ый разряд последовательности  $\beta$  равен 1 ( $\beta_k = 1$ ), когда в последовательности  $\gamma$  число  $2k-2$  предшествует числу  $2k-1$  и в противном случае равен 0.

Каждый начальный отрезок длины  $2k$  последовательности  $\gamma$ , соответственно начальный отрезок длины  $k$  последовательности  $\beta$  определяет некоторый порядок монотонности в  $P_{2k}$ . Например для  $k \leq 2$  следующим образом имеем:

$$\begin{array}{ll} k=1 & \gamma_1^1 = 01 \leftrightarrow \beta_1^1 = 0 \\ & \gamma_1^2 = 10 \leftrightarrow \beta_1^2 = 1 \\ k=2 & \gamma_2^1 = 0123 \leftrightarrow \beta_2^1 = 00 \\ & \gamma_2^2 = 0132 \leftrightarrow \beta_2^2 = 01 \\ & \gamma_2^3 = 1023 \leftrightarrow \beta_2^3 = 10 \\ & \gamma_2^4 = 1032 \leftrightarrow \beta_2^4 = 11 \end{array}$$

Пусть  $\beta = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$ . Ясно, что предполный класс из  $P_2$ , соответствующий порядку  $\beta_1$  содержится в предполном классе из  $P_4$ , соответствующем порядку  $\beta_1 \beta_2$ .

Если  $\beta_k = 0$ , то мы можем рассматривать монотонный предполный класс из  $P_{2k-1}$ , который соответствует порядку  $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2k-2}$  « $2k-2$ ». А если  $\beta_k = 1$ , то мы можем рассматривать предполный класс из  $P_{2k-1}$ , который соответствует

порядку  $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2k-2}$  « $2k-2$ » и кроме этого возьмем еще класс функций, который получаем так, что все функции предыдущего класса, в котором на каком-то месте было значение  $2k-2$ , заменяем на  $2k-1$ .

Обозначим через  $P_k^\gamma$  предполный класс в  $k$ -значной логике  $P_k$ , определяемый порядком монотонности, который задается отрезком длины  $k$  последовательности  $\gamma$ .

Можно показать, что  $P^\gamma = \bigcup_{k=2}^{\infty} P_k^\gamma$  — есть предполный класс в  $Q$ . Различным последовательностям  $\gamma$  будут соответствовать неизоморфные предполные классы. Так как мощность различных последовательностей  $\beta$  из 0 и 1 — континуум, то лемма доказана.

Таким образом нами доказана:

**Теорема.** Для любого кардинального числа  $\alpha$ , равного любому натуральному числу,  $\aleph_0$  или  $\mathfrak{c}$  существует предельная логика, мощность множества всех различных предполных классов которой равна  $\alpha$ .

3°. Используя конструкцию Г. П. Гаврилова [4] и методы данной статьи, можно показать также, что:

Для любого кардинального числа  $\alpha$ , равного любому натуральному числу,  $\aleph_0$  или  $\mathfrak{c}$  существует континуум попарно неизоморфных предельных логик, в каждой из которых ровно  $\alpha$  предполных классов.

### On cardinal numbers of sets of precomplete classes in limit logics

Limit logics were introduced by S. V. Jablonski. The definition of limit logic implies immediately that each limit logic has at most a continuum of precomplete classes. In the paper the question about the number of precomplete classes in various limit logics is studied more precisely.

The main results are:

- 1) for any natural number  $n$ , there is limit logic with just  $n$  precomplete classes;
- 2) there is limit logic with denumerable set of precomplete classes;
- 3) there is limit logic with a continuum of precomplete classes.

All the examples of logics are constructed effectively.

The methods of this paper and of a paper by G. P. Gavrilo allow to establish more strong result: for any cardinal number  $\alpha$  from 1)–3), there is a continuum of limit logics no two of which are isomorphic to one another with just  $\alpha$  precomplete classes.

### Литература

- [1] Яблонский, С. В., О предельных логиках, ДАН СССР т. 118, 1958, стр. 657—660.
- [2] Яблонский, С. В., Функциональные построения в  $k$ -значной логике, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР LI, 1958, стр. 5—142.
- [3] Мучник, А. А., Ю. И. Янов, О существовании  $k$ -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, ДАН СССР, т. 127, 1959, стр. 44—46.
- [4] Гаврилов, Г. П., О мощности множества предельных логик, обладающих конечным базисом, Проблемы кибернетики, вып. 21, стр. 115—126.

(Поступило 5-ого апреля 1971 г.)



# **Procédé pour déterminer les formes normales minimales des fonctions booléennes, en utilisant les règles de minimisation de la fonction de coût**

Par B. PAPP

## *Résumé*

L'étude présente un procédé pour déterminer toutes les formes normales minimales disjonctives et conjonctives des fonctions booléennes, complètement ou incomplètement spécifiées, en utilisant un théorème concernant les implicants premiers. À l'aide de ce théorème la «fonction de présence» est déduite, et cela contrairement à l'algorithme de Quine-McCluskey, sans que la connaissance de tous les implicants premiers soit supposée. Puis la fonction de coût est définie avec ses propriétés générales, et les règles de minimisation du coût en sont déduites. La détermination des formes minimales est accomplie à l'aide de ces règles. La pratique est illustrée par un exemple à huit variables.

## *Nomenclature de certaines notions de l'étude*

1. Nous entendons par «fonction logique», ou booléenne, une fonction définie avec ses variables sur un ensemble de propositions, à tout élément de l'ensemble étant ordonnée l'une des deux valeurs suivantes: «vraie» ou «fausse».

2. Par l'expression «points d'une fonction logique», sauf d'autre remarque, nous entendons les lieux des valeurs vraies (les points vrais) du domaine de la fonction.

3. Par l'expression «monôme» nous désignons une fonction logique n'ayant que conjonction ( $\wedge$ ) entre ses variables; les variables peuvent être affirmées, ou niées. Là, où l'opération n'est pas marquée, on doit toujours entendre conjonction. Dans la notion de monôme est comprise la fonction «constante vraie ( $v$ )», mais la fonction «constante fausse ( $f$ )» est exclue.

4. La marque « $\sim$ » au dessus des variables sert à exprimer, que la variable en question ( $\bar{x}$ ) peut être ou bien affirmée ( $x$ ), ou bien niée ( $\bar{x}$ ), mais toujours l'un des deux sens [2].

5. L'expression «la fonction logique  $P$  recouvre  $Q$ » équivaut à « $Q$  implique  $P$ », ou, à « $Q$  est implicant de  $P$ » ( $Q \rightarrow P$ ).

6. Nous appelons «facteurs» les expressions se rattachant par conjonction ( $\wedge$ ), et «termes» se rattachant par disjonction ( $\vee$ ).

7. Nous appelons «facteur élémentaire» un facteur n'ayant qu'une seule variable affirmée ou niée.

8. La marque  $\leftrightarrow$  sert à représenter l'équivalence.

Pour exprimer une fonction booléenne en sa forme disjonctive minimale, nous utiliserons un théorème concernant les implicants premiers, nommé «théorème de base». Les déductions de ce théorème et de ses auxiliaires seront publiées dans la partie préambulaire qui suit.

### § 1. Déduction et conséquence du théorème de base

*Théorème auxiliaire 1.* Pour qu'un monôme  $R$  soit recouvert par un monôme  $P$ , il faut et il suffit, que  $P$  soit composée de tels facteurs élémentaires, qui figurent tous dans le monôme  $R$ .

*Démonstration.* La suffisance de la condition est évidente. Quant à la nécessité, qu'il soit supposé qu'un certain facteur élémentaire  $\tilde{x}$  figurant dans  $P$ , ne figure pas dans  $R$ . On peut écrire donc:  $P = \tilde{x}Q$ . Regardons maintenant le monôme  $S = \tilde{x}R$ , qui justement parce que  $\tilde{x}$  ne figure pas dans  $R$ , ne peut être constamment faux, mais il est vrai sur un sous-ensemble des points de  $R$ . De l'expressions de  $P$  et de  $S$  découlent  $S \rightarrow R$  et  $S \rightarrow \tilde{P}$ , c'est à dire qu'il y a au moins un point, où  $R$  est vraie, mais  $P$  est fausse, et ainsi  $R$  ne peut être recouverte par  $P$ .

La théorème auxiliaire 1 veut dire, que tous les monômes qui recouvrent  $R$ , peuvent être dérivés en supprimant des facteurs de  $R$ .

Nous aurons besoin encore des définitions suivantes:

A). Un facteur élémentaire  $\tilde{x}_i$  d'un monôme  $R$  construit des variables d'une fonction logique  $\varphi$ , — est nommé «facteur supprimable de  $R$ », si le monôme réduit  $R_i$ , dérivé de  $R$  par la suppression de  $\tilde{x}_i$ , implique  $\varphi$ . C'est à dire, si  $\tilde{x}_i$  satisfait aux conditions suivantes:  $R = \tilde{x}_i R_i$ ;  $R_i \neq R$ ;  $R_i \rightarrow \varphi$ .

(D'après cela pour les implicants premiers s'impose la définition suivante: L'implicant premier est un monôme implicant, qui n'a pas de facteur supprimable.)

B). Tels facteurs élémentaires  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  d'un implicant premier  $P$  d'une fonction  $\varphi$ , qui sont supprimables d'un monôme  $R$  recouvert par  $P$ , sont dénommés les «facteurs critiques de  $P$  relatifs à  $R$ »; respectivement, les monômes  $R_i$ , pour lesquels  $R = \tilde{x}_i R_i$ ;  $R_i \neq R$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$  sont valables, sont dénommés les «monômes critiques de  $R$  relatifs à  $P$ ».

De la définition A) il est évident, que tous les facteurs élémentaires d'un monôme  $R$  (implicant de  $\varphi$ ) peuvent être rangés dans l'une ou l'autre des deux classes suivantes: «les supprimables» et «les non supprimables».

Qu'il soit désignée par  $R^*$  la conjonction de tous les facteurs non supprimables de  $R$ . Si tous les facteurs de  $R$  sont supprimables, soit  $R^* = v$  (const. vraie).

*Théorème auxiliaire 2.*  $R^*$  recouvre tous les monômes  $Q$ , qui recouvrent  $R$  et impliquent  $\varphi$ .

*Démonstration.* Qu'il soit supposé, que  $R^*$  ne recouvre pas  $Q$ . Ainsi, selon le théorème auxiliaire 1  $R$  doit avoir (au moins) un facteur élémentaire  $\tilde{x}_\alpha$ , qui figure dans  $R^*$ , et qui ne figure pas dans  $Q$ . Désignons par  $R_\alpha$  le monôme réduit, pour

lequel  $R = \tilde{x}_\alpha R_\alpha$ ;  $R_\alpha \neq R$  sont valables. Il est évident, que tous les facteurs élémentaires de  $Q$  figurent dans  $R_\alpha$ , donc  $R_\alpha \rightarrow Q$ . De là, par  $Q \rightarrow \varphi$  vient  $R_\alpha \rightarrow \varphi$ , c'est à dire  $\tilde{x}_\alpha$  doit être facteur supprimable de  $R$ , contrairement à la définition de  $R^*$ .

Le théorème auxiliaire 2 équivaut à ce que dans chaque monôme  $Q$ , qui recouvre  $R$  et implique  $\varphi$ , doivent figurer tous les facteurs non supprimables de  $R$ .

La première partie du théorème de base est la suivante

*Théorème 1. Pour qu'un monôme  $R$ , qui implique la fonction  $\varphi$ , soit recouvrable uniquement par un seul implicant premier de  $\varphi$ , il faut et il suffit, que  $R^*$  soit implicant de  $\varphi$ .*

(La condition peut être formulée encore: que les facteurs «individuellement supprimables» de  $R$ , soient «supprimables tous à la fois».)

*Démonstration.* La suffisance de la condition peut être comprise aisément: Si  $R^*$  implique  $\varphi$ , il existe un implicant premier  $P$ , qui recouvre  $R^*$  (et avec cela  $R$  aussi). Selon le théorème auxiliaire 2  $R^*$  recouvre aussi  $P$ , donc  $P = R^*$ , et aucun autre implicant premier ne peut pas recouvrir  $R$ , parce que deux implicants premiers différents ne se recouvrent pas l'un l'autre [6]. (Si  $R^*$  implique  $\varphi$ , et  $R$  comprend toutes les variables de  $\varphi$ ,  $R^*$  est donc implicant premier «essentiel».)

Quant à la nécessité, qu'il soit supposé, que  $R^*$  n'implique pas  $\varphi$ , qui revient à dire, (que les facteurs qu'on peut supprimer de  $R$  individuellement, ne soient pas supprimables tous à la fois, mais) qu'un certain implicant premier  $P$ , qui recouvre  $R$ , renferme quelque(s)-un(s) de l'ensemble des facteurs supprimables de  $R$ , c'est à dire a pour facteurs critiques relatifs à  $R$  les suivants:  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ ; ( $k \geq 1$ ). Regardons maintenant le monôme critique  $R_\alpha$ , ( $1 \leq \alpha \leq k$ ) qui est recouvrable par un implicant premier  $P_\alpha$ . Or  $P_\alpha$  (qui recouvre aussi  $R$ ) ne peut être égale à  $P$ , ( $\tilde{x}_\alpha$  figurant dans  $P$ , et ne figurant pas dans  $P_\alpha$ ) c'est à dire, l'existence d'un facteur critique de  $P$  relatif à  $R$  implique l'existence au moins d'un deuxième implicant premier, qui recouvre  $R$ .

En outre, on peut comprendre facilement la deuxième partie du théorème de base comme voici

*Théorème 2. Pour qu'un implicant premier  $P'$  de la fonction  $\varphi$ , qui diffère de  $P$ , recouvre aussi (en dehors de  $P$ ) le monôme  $R$ , il faut et il suffit, que  $P'$  recouvre quelque(s)-un(s) des monômes critiques de  $R$  relatifs à  $P$ .*

*Démonstration.* La suffisance de la condition selon le théorème auxiliaire 1 est évidente. Pour prouver la nécessité, qu'il soit supposé, que  $P'$  recouvre  $R$ .  $P$  ne pouvant pas recouvrir  $P'$ , d'après le théorème auxiliaire 1 doit avoir (au moins) un facteur  $\tilde{x}_\alpha$  qui ne figure pas dans  $P'$ . Selon le théorème auxiliaire 2  $\tilde{x}_\alpha$  doit être l'un des facteurs critiques de  $P$  relatif à  $R$ , et (l'auxiliaire 1 met en évidence, que) le monôme critique respectif  $R_\alpha$  est recouvert par  $P'$ .

En faisant la synthèse des théorèmes 1 et 2, on peut formuler le théorème servant comme une nouvelle base au «recouvrement des fonctions» comme suite

*Théorème de base. Un monôme  $R$ , implicant d'une fonction  $\varphi$  ne peut être recouvert en dehors d'un implicant premier  $P$ , que par les implicants premiers qui recouvrent quelque(s)-un(s) des monômes critiques de  $R$  relatifs à  $P$ . Dans le cas, et seulement, où il n'existe aucun monôme critique, ( $P = R^*$ , et) le seul implicant premier qui recouvre  $R$ , est  $P$ .*

A l'aide de l'emploi recurrent de ce théorème on peut déterminer tous les implicants premiers recouvrant un point  $T$  quelconque d'une fonction booléenne  $\varphi$  sans la connaissance de tous les autres implicants premiers de la fonction.

L'algorithme pour atteindre ce but a deux parts.

**A:** Trouver un implicant premier  $P$ , qui recouvre un monôme  $R$  implicant de  $\varphi$ . (Cela peut être effectué en examinant les monômes  $R_i$  dérivés de  $R$  par la suppression d'un seul facteur élémentaire  $\bar{x}_i$  de  $R$ , s'ils impliquent  $\varphi$ , ou non? S'il n'y a pas aucun implicant parmi les  $R_i$ , alors  $R$  est implicant premier; et si on arrive à un implicant  $R_\alpha$ , on transmet le procédé sur  $R_\alpha$  au lieu de  $R$ .)

**B:** Trouver les monômes critiques  $R_1, R_2, \dots, R_k$  de  $R$  relatifs à  $P$ . (Par exemple en déterminant parmi les facteurs élémentaires de  $P$  ceux, qui sont supprimables de  $R$ .)

En accomplissant ces deux pas sur le monôme  $R=T$ , on arrive à un implicant premier  $P_1$  qui recouvre  $T$ . Si  $T$  n'a pas de monôme critique relatif à  $P_1$ , l'algorithme est fini; et s'il y a des monômes critiques, on a pour exécuter les deux pas  $A$  et  $B$  sur chacun d'eux, et cela doit être répété jusqu'à qu'il ne se présentera plus aucun monôme critique.

La hiérarchie des opérations consécutives engendre un algorithme représentable par un graphe de type d'arbre, et le théorème précédent garantit, que cet algorithme nous présente tous les implicants premiers qui recouvrent  $T$  sans nous présenter aucun autre.

## § 2. Le recouvrement d'une fonction booléenne incomplètement spécifiée

Qu'il soit  $\varphi$  une fonction booléenne incomplètement spécifiée, dont le domaine se subdivise en trois parts: les points vrais, les points faux, et les points à valeur indéterminée. Le recouvrement de  $\varphi$  par des implicants premiers peut être effectué de la manière suivante:

1. Dans le cas où la fonction  $\varphi$  n'est pas donnée sous forme de table de vérité, il faut préciser l'ensemble  $V$  de tous les points vrais, où la valeur vraie est impérative.

2. Comme de la littérature est connu, dans le cas d'une fonction incomplètement spécifiée on a pour recouvrir seulement l'ensemble  $V$ , et cela par des implicants premiers de la fonction logique nommée «supérieure»; donc il faut préciser la fonction supérieure  $\varphi^*$  de  $\varphi$ , qui s'obtient en donnant aux points indéterminés de  $\varphi$  la valeur vraie, et en laissant intacts tous les autres points [3].

3. On examine successivement par le théorème 1 les points de l'ensemble  $V$ , s'il y en a des points qui ne sont recouvrables que par un seul implicant premier de la fonction supérieure  $\varphi^*$ . Quand on arrive au premier point  $A_1^1$  satisfaisant à cette condition, il est à tenir note de l'implicant premier  $P_1^1$  qui le recouvre, et à retrancher tous les points recouverts par  $P_1^1$  (ceux qui appartiennent à  $V$ ) de l'ensemble  $V$  comme recouverts déjà. Ce procédé doit être répété sur le sous-ensemble actuel de  $V$  qui reste, jusqu'à qu'il n'existera plus aucun point recouvrable uniquement par un seul implicant premier dans la partie non recouvert de  $V$ . Ainsi on obtient une suite  $E = P_1^1, P_2^1, \dots, P_e^1$  des implicants premiers (se révélant essentiels) [8].



4. Puis à l'aide du théorème de base on continue sur le sous-ensemble non recouvert de  $V$  par la recherche des points qui ne sont recouvrables que par deux implicants premiers de  $\varphi^*$ . Le premier point satisfaisant à cette condition soit désigné par  $A_1^2$ , et les éléments de la paire des implicants premiers qui le recouvrent par  $P_1^2$  et  $P_2^2$ , et qu'on retranche du sous-ensemble actuel de  $V$  (jusqu'ici non recouvert) la portion que recouvre la conjonction  $P_1^2 \wedge P_2^2$ . Ensuite on fixe sur le sous-ensemble actuel le point suivant  $A_2^2$  (si ça existe), que peuvent recouvrir seulement les implicants premiers  $P_3^2$  et  $P_4^2$ , et le procédé sera répété jusqu'à manquer de l'ensemble non recouvert les points recouvrables précisément par deux implicants premiers. Puis on continue par les points qui sont recouvrables précisément par trois, par quatre etc. implicants premiers, en retranchant toujours les points recouverts par la conjonction des ternaires, des quaternaires etc. jusqu'à ce que la dernière portion de l'ensemble  $V$  contenant un  $r$ -ième point  $A_r^k$  qui peut être recouvert précisément par  $k$  implicants premiers, sera recouvert par la conjonction de ces  $k$  implicants premiers.

Le fruit du procédé décrit en ces quatre points est une suite finie des suites d'implicants premiers, des individuelles, des paires, des ternaires etc. Selon les notations employées, en mettant entre parenthèses les paires, les ternaires etc., la suite composée ( $S$ ) est de la forme suivante

$$\begin{aligned} S = & P_1^1, P_2^1, \dots, P_e^1, \\ & (P_1^2, P_2^2), (P_3^2, P_4^2), \dots, (P_{2m-1}^2, P_{2m}^2), \\ & \dots \\ & (P_1^k, P_2^k, \dots, P_k^k), \dots, (P_{kr-k+1}^k, P_{kr-k+2}^k, \dots, P_{kr}^k). \end{aligned}$$

Il est à remarquer, que des implicants premiers entre les parenthèses différentes peuvent être identiques, et que dans cette suite ne doivent pas figurer tous les implicants premiers de  $\varphi^*$ .

### § 3. L'obtention de la fonction de présence $G$

En suivant les indications de la suite  $S$  du § 2, on peut construire une fonction logique  $G$  pour bien utiliser les implicants premiers de  $S$ . La variable  $G_j^i$  de la fonction  $G$  se traduit par la proposition, que l'implicant premier  $P_j^i$  sera utilisé dans une certaine formule  $F$ , laquelle  $F$  est une disjonction d'implicants premiers de  $\varphi^*$ .

La formule de la fonction  $G$  sera construite de la suite  $S$  en écrivant au lieu de chaque lettre  $P$  la lettre  $G$  avec les mêmes indices, et en mettant la disjonction ( $\vee$ ) au lieu de chaque virgule qui se trouve à l'intérieure des parenthèses, et la conjonction ( $\wedge$ ) au lieu de toute autre virgule. Donc,

$$\begin{aligned} G = & G_1^1 \wedge G_2^1 \wedge \dots \wedge G_e^1 \wedge \\ & \wedge (G_1^2 \vee G_2^2) \wedge (G_3^2 \vee G_4^2) \wedge \dots \wedge (G_{2m-1}^2 \vee G_{2m}^2) \wedge \\ & \dots \\ & \wedge (G_1^k \vee G_2^k \vee \dots \vee G_k^k) \wedge \dots \wedge (G_{kr-k+1}^k \vee G_{kr-k+2}^k \vee \dots \vee G_{kr}^k). \end{aligned}$$

Nous avons la conception, que la fonction logique  $G$  a aussi pour variables les instructions concernant tous les autres implicants premiers de  $\varphi^*$ , qui éventuelle-

ment ne se trouvent pas dans la suite  $S$ , mais de ces variables la valeur de  $G$  est indépendant.

Dans tous les cas où la valeur de  $G$  est vraie, on utilise à la construction de  $F$  tous les membres de la suite  $E$ , et au moins un implicant premier de chaque parenthèse (qui recouvre naturellement la conjonction des implicants premiers de la même parenthèse). De la construction de la suite  $S$  découle, que dans ce cas tout l'ensemble  $V$  sera recouvert, ce qui signifie, que si la valeur de la fonction  $G$  concernant une formule  $F$  est vraie, la fonction définie par la formule  $F$  est égale à  $\varphi$ .

Et dans tous les cas où la valeur de  $G$  est fausse, — ou qu'il manque de  $F$  quelqu'un des implicants premiers de  $E$  (par ex.  $P_i^1$ ), ou qu'il manquent tous les implicants premiers fermés d'une parenthèse. Mais ainsi  $F$  ne peut pas recouvrir un point  $A_i^1$  de  $V$  qui est recouvrable seulement par l'implicant premier  $P_i^1$  de  $E$ , qui manque, ou bien un point  $A_j^h$  qui est recouvrable seulement par les  $h$  implicants premiers qui manquent tous de la formule  $F$ . C'est pourquoi la formule  $F$  construite sous cette condition ne peut pas exprimer la fonction  $\varphi$ .

Ça veut dire, que de l'ensemble de toutes les formules  $F$  qui sont disjonctions d'implicants premiers de  $\varphi^*$ , la fonction  $G$  sélectionne le sous-ensemble, dont les éléments sont égaux à  $\varphi$ ; notamment à tout point vrai de la fonction  $G$  appartient une telle formule  $F$ , et en dehors de celles-là n'existe aucune autre disjonction d'implicants premiers de  $\varphi^*$  qui puisse exprimer  $\varphi$ .

#### § 4. Propriétés et règles de minimisation de la fonction de coût

Du § 3 il est évident, que les points (vrais et faux) du domaine de la fonction  $G$  sont en correspondance biunivoque avec les formules  $F$  (égaux et inégaux à la fonction  $\varphi$ ) définies comme disjonctions d'implicants premiers de  $\varphi^*$ . Ainsi à chaque point du domaine de  $G$  nous pouvons ordonner un nombre réel, le coût  $\mathcal{K}$  de la formule  $F$ , laquelle  $F$  est construite selon les instructions qui s'appartiennent précisément au point en question de  $G$ .

Après avoir précisé le coût  $\mathcal{K}$  qui est d'ailleurs une fonction pseudo-booléenne définie sur le domaine de  $G$ , le problème de minimisation de la forme normale disjonctive de  $\varphi$  peut être formulé de la manière suivante. Sur le sous-ensemble du domaine de la fonction  $G$ , là où la valeur de  $G$  est vraie, il faut chercher les points auxquels appartient le coût minimum.

Quant aux propriétés de la fonction de coût  $\mathcal{K}$ , nous imposerons quelques restrictions, par lesquelles le procédé deviendra beaucoup plus simple.

À vrai dire nous avons fait déjà la première restriction, ayant défini la fonction de coût seulement sur le domaine de la fonction  $G$ ; ainsi donc

- I. Les formes normales disjonctives de  $\varphi$  qui ne sont pas construites exclusivement des implicants premiers de  $\varphi^*$ , sont exclues de notre recherche.

Quant aux autres, qu'il soit désigné par  $P_1, P_2, \dots, P_z$  la suite de tous les implicants premiers de  $\varphi^*$ , ( $P_i = P_j$  subsistant seulement si  $i = j$ ) et respectivement par  $G_1, G_2, \dots, G_z$  la totalité des variables de  $G$ ,  $G_i$  étant l'instruction d'utilisation de  $P_i$  dans  $F$  ( $1 \leq i \leq z$ ).

Le coût  $k_i$  des formules  $F$  qui comprennent un seul implicant premier  $P_i$ , soit

dénommé coût élémentaire, ou coût de l'implicant premier  $P_i$ . En exprimant cette chose par le symbole  $\mathcal{K}$  de la fonction de coût, on peut écrire

$$\mathcal{K}[\bar{G}_1 \bar{G}_2 \dots \bar{G}_{i-1} G_i \bar{G}_{i+1} \bar{G}_{i+2} \dots \bar{G}_z] = k_i, \quad (i = 1, 2, \dots, z).$$

( $G_i$  seule est affirmée, et les autres  $z-1$  variables sont barrées.)

Les autres restrictions ou exigences à l'égard de  $\mathcal{K}$  sont les suivantes

**II.** Tous les coûts élémentaires sont positifs,

$$k_i > 0, \quad (i = 1, 2, \dots, z).$$

**III.** Le coût de chaque formule  $F$  est égal à la somme des coûts d'implicants premiers qui s'y trouvent.<sup>1</sup>

À ce propos nous stipulons encore, que dans la formule  $F$  figureront seulement des implicants premiers différentes; et pour l'intégralité, que le coût de la formule vide (qui n'a aucun implicant premier) est égal à 0.

Des relations décrites ci-dessus il est évident, qu'en partant des coûts élémentaires  $k_i$ , ( $i=1, 2, \dots, z$ ) et en employant l'exigence **III.** on peut déterminer facilement le coût pour chaque point du domaine de  $G$ , c'est à dire pour toute formule  $F$ .

Maintenant nous voulons expliquer la notion du coût minimum plus généralement.

Nous entendons par le coût minimum d'une fonction logique  $X$  qui est construite de variables de  $G$  — en symboles  $\mathcal{K}_{\min}[X]$  —, le coût minimum sur la partie du domaine de  $G$ , où  $X$  est vraie.

À l'aide des exigences **II.** et **III.** on peut comprendre directement la règle suivante

*Règle 1.* D'un monôme à minimiser on peut négliger les variables barrées, et le coût minimum du monôme est égal à la somme des coûts élémentaires appartenants aux variables affirmées qui s'y trouvent.

On peut comprendre aussi facilement la règle suivante

*Règle 2.* Le coût minimum d'une disjonction à plusieurs termes est égal au minimum des coûts minimums des termes séparés. En symboles,

$$\mathcal{K}_{\min}[X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n] = \min \{ \mathcal{K}_{\min}[X_1], \mathcal{K}_{\min}[X_2], \dots, \mathcal{K}_{\min}[X_n] \}$$

où  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des fonctions logiques des variables de  $G$ .

Il est à observer que la règle 2 n'utilise point les exigences **II.** et **III.**, mais elle est basée simplement sur le fait, que le point du coût minimum doit être recouvert au moins par l'un des termes de la disjonction.

Il est à déduire encore la règle concernant la conjonction. Que  $X$  et  $Y$  soient deux fonctions logiques des variables de  $G$ . Supposons, que  $X$  et  $Y$  n'ont pas aucune «variable effective» commune [6]. (Celle-ci n'est pas une condition nécessaire de la règle à déduire, mais elle est suffisante seulement.) Dans ce cas on aura

$$\mathcal{K}_{\min}[X \wedge Y] = \mathcal{K}_{\min}[X] + \mathcal{K}_{\min}[Y]. \quad (1)$$

<sup>1</sup> On peut rencontrer le cas aussi, où le surcroît de coût causé par l'incorporation d'un implicant premier nouveau dépende des termes qui se trouvent déjà dans  $F$ . Naturellement dans un pareil cas l'exigence **III.** n'est pas accomplie.

*Démonstration.* Que des formes normales disjonctives de  $X$  et de  $Y$  soient,

$$X = X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_i \vee \dots \vee X_m$$

et

$$Y = Y_1 \vee Y_2 \vee \dots \vee Y_j \vee \dots \vee Y_n.$$

Nous pouvons supposer, que dans ces formules ne figurent que les variables effectives de  $X$  et de  $Y$ . Selon la règle 2 il existe une  $\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq m$ ) et une  $\beta$  ( $1 \leq \beta \leq n$ ), pour lesquelles

$$\mathcal{K}_{\min}[X] = \mathcal{K}_{\min}[X_\alpha], \quad \text{et respectivement} \quad \mathcal{K}_{\min}[Y] = \mathcal{K}_{\min}[Y_\beta] \quad (2)$$

s'accompliront, ce qui signifie, que pour toute  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) et  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ )

$$\mathcal{K}_{\min}[X_\alpha] \leq \mathcal{K}_{\min}[X_i] \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{\min}[Y_\beta] \leq \mathcal{K}_{\min}[Y_j] \quad (3)$$

sont valables. En exécutant la conjonction  $X \wedge Y$ , selon le produit de Descartes on a

$$X \wedge Y = X_1 Y_1 \vee \dots \vee X_\alpha Y_\beta \vee \dots \vee X_i Y_j \vee \dots \vee X_m Y_n \quad (4)$$

$X_i$  et  $Y_j$  n'ayant pas de commune variable, dans le monôme  $X_i Y_j$  (qui est un monôme des variables de  $G$ ) toutes les variables de  $X_i$  et de  $Y_j$  se présentent sans «absorption», c'est pourquoi à l'aide de la règle 1 on a

$$\mathcal{K}_{\min}[X_i Y_j] = \mathcal{K}_{\min}[X_i] + \mathcal{K}_{\min}[Y_j]. \quad (5)$$

En utilisant l'égalité 5 à l'aide de 3 découle

$$\mathcal{K}_{\min}[X_\alpha Y_\beta] \leq \mathcal{K}_{\min}[X_i Y_j]. \quad (6)$$

Enfin de 4 par la règle 2 et à l'aide de 6 de 5 et de 2 vient 1.

Il est facile à comprendre, que sous pareilles conditions l'égalité 1 peut être généralisée pour plusieurs facteurs, c'est à dire la règle suivante est applicable:

*Règle 3.* Dans le cas où une conjonction à plusieurs facteurs satisfait à la condition, que les paires combinables de ses facteurs n'ont pas de variable effective commune, la minimisation de son coût peut être exécutée par facteurs, et le coût minimum de la conjonction est égale à la somme des coûts minimums de ses facteurs. En symboles

$$\mathcal{K}_{\min}[X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n] = \mathcal{K}_{\min}[X_1] + \mathcal{K}_{\min}[X_2] + \dots + \mathcal{K}_{\min}[X_n]$$

où  $X, X_2, \dots, X_n$  sont des fonctions logiques sans variables communes.

## § 5. L'utilisation des règles de minimisation

Étant en possession des règles du § 4 nous revenons à la minimisation du coût de la fonction de présence  $G$ , c'est à dire à la détermination de  $\mathcal{K}_{\min}[G]$ .

D'abord les facteurs composés de la fonction  $G$ , c'est à dire ceux qui sont entre parenthèses, doivent être regroupés et mises entre crochets d'une telle manière, qu'aucune variable d'un crochet ne se présente pas à l'extérieur de ce crochet. Ainsi, il faut diviser la fonction  $G$  par crochets en tant de sous-fonctions se rattachant par conjonction, qu'il est possible. Quant aux variables avec l'indice supérieure 1, il

est convenable de les mettre en un seul groupe. Ainsi les expressions dans les crochets satisferont à la condition de la règle 3, donc on peut minimiser par crochets.

Puis il faut réduire chaque sous-fonction en sa forme normale disjonctive, ainsi la règle 2 sera utilisable. Enfin à l'aide de la règle 1 le problème se réduit aux sélections des termes minimaux de suites de nombres bien définies.

Il est à remarquer, que les implicants premiers de  $\varphi^*$  qui ne se trouvent pas dans la suite  $S$  du § 2, sont tout à fait inutiles au point de vue de la minimisation.

La méthode pour déterminer les points du coût minimum de la fonction  $G$  sera représentée par un exemple:

En partant de la fonction (complètement spécifiée)

$$\varphi = (A\bar{B} \vee B\bar{C} \vee C\bar{D}) \leftrightarrow (D\bar{E} \vee E\bar{F} \vee G\bar{H}) \quad (= \varphi^*)$$

ayant 8 variables et 122 points vrais, on arrive à une suite  $S$  qui comprendre 25 implicants premiers, dont 10 sont essentiels.

Au lieu de donner les détails nous faisons savoir, que la suite  $S$  était déterminée à l'aide du théorème de base du § 1, en employant dans ce cas une méthode manuelle des cartes logiques.<sup>2</sup>

Pour la clarté et la concision nous voulons employer des indices simples, en désignant les implicants premiers essentiels par  $E_1, E_2, \dots, E_{10}$ , et leurs présence dans la formule  $F$  par  $G_0$ . L'utilisation dans la formule  $F$  d'un implicant premier  $P_i$ , sera désignée par  $G_i$ . Le coût de chaque implicant premier soit compté égale au nombre total des lettres qui s'y trouvent.

Les implicants premiers de  $S$  et leurs coûts sont les suivants

$E_1 = A\bar{B}D\bar{E}$	4	$P_3 = \bar{A}CDEFH$	6
$E_2 = A\bar{B}G\bar{H}$	4	$P_4 = \bar{A}\bar{B}DEFH$	6
$E_3 = B\bar{C}D\bar{E}$	4	$P_5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}EFH$	6
$E_4 = B\bar{C}G\bar{H}$	4	$P_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}FH$	6
$E_5 = C\bar{D}E\bar{F}$	4	$P_7 = B\bar{C}D\bar{F}$	4
$E_6 = C\bar{D}G\bar{H}$	4	$P_8 = B\bar{C}E\bar{F}$	4
$E_7 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{G}$	6	$P_9 = B\bar{D}E\bar{F}$	4
$E_8 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}H$	6	$P_{10} = \bar{A}CDEF\bar{G}$	6
$E_9 = BCDEF\bar{G}$	6	$P_{11} = \bar{A}\bar{B}DEF\bar{G}$	6
$E_{10} = BCDEFH$	6	$P_{12} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}EF\bar{G}$	6
		$P_{13} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}F\bar{G}$	6
$P_1 = \bar{A}BD\bar{F}$	4	$P_{14} = A\bar{C}\bar{E}\bar{F}$	4
$P_2 = A\bar{B}E\bar{F}$	4	$P_{15} = A\bar{D}E\bar{F}$	4

Selon les notations employées la fonction  $G$  (marquée ici par  $G'$ ) se présente sous la forme suivante

$$G' = G_0 \wedge (G_1 \vee G_2) \wedge (G_3 \vee G_4) \wedge (G_4 \vee G_5) \wedge (G_5 \vee G_6) \wedge (G_7 \vee G_8) \wedge (G_8 \vee G_9) \wedge \\ \wedge (G_{10} \vee G_{11}) \wedge (G_{11} \vee G_{12}) \wedge (G_{12} \vee G_{13}) \wedge (G_2 \vee G_{14} \vee G_{15}).$$

<sup>2</sup> C'est une invention de l'auteur pour exécuter des opérations logiques jusqu'à 8 ou 10 variables d'entrée.

Par un regroupement convenable

$$G' = [G_0] \wedge [(G_1 \vee G_2) \wedge (G_2 \vee G_{14} \vee G_{15})] \wedge [(G_3 \vee G_4) \wedge (G_4 \vee G_5) \wedge (G_5 \vee G_6)] \wedge \\ \wedge [(G_7 \vee G_8) \wedge (G_8 \vee G_9)] \wedge [(G_{10} \vee G_{11}) \wedge (G_{11} \vee G_{12}) \wedge (G_{12} \vee G_{13})].$$

En réduisant les crochets à leurs formes normales disjonctives, et en faisant apparaître le coût de chaque terme en dessous

$$G' = [G_0]_{48} \wedge [G_1 G_{14} \vee G_1 G_{15} \vee G_2]_{8 \quad 8 \quad 4} \wedge [G_3 G_5 \vee G_4 G_5 \vee G_4 G_6]_{12 \quad 12 \quad 12} \wedge [G_7 G_9 \vee G_8]_{8 \quad 4} \wedge \\ \wedge [G_{10} G_{12} \vee G_{11} G_{12} \vee G_{11} G_{13}]_{12 \quad 12 \quad 12}.$$

En choisissant par crochet le coût minimum

$$G'_{\min} = [G_0]_{48} \wedge [G_2]_{4} \wedge [G_3 G_5 \vee G_4 G_5 \vee G_4 G_6]_{12 \quad 12 \quad 12} \wedge [G_8]_{4} \wedge [G_{10} G_{12} \vee G_{11} G_{12} \vee G_{11} G_{13}]_{12 \quad 12 \quad 12}.$$

Donc, les formules  $F$  respectives, c'est à dire les formes normales minimales de  $\varphi$  sont les suivantes

$$F_{\min} = E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_{10} \vee P_2 \vee P_8 \vee \left\{ \begin{matrix} P_3 \vee P_5 \\ P_4 \vee P_5 \\ P_4 \vee P_6 \end{matrix} \right\} \vee \left\{ \begin{matrix} P_{10} \vee P_{12} \\ P_{11} \vee P_{12} \\ P_{11} \vee P_{13} \end{matrix} \right\}.$$

On peut choisir arbitrairement une ligne de chaque accolade, ainsi on obtient 9 expressions différentes pour la forme normale disjonctive minimale de la fonction  $\varphi$ , chacune ayant le coût de 80 lettres.

Comme il est connu, la minimisation de la forme normale conjonctive est ramenable à celle de la forme disjonctive. Dans ce cas le procédé exposé doit être accompli sur la fonction  $\bar{\varphi}$ , et après la négation de la forme disjonctive on obtient la forme conjonctive minimale de  $\varphi$ .

Il est enfin à remarquer, que dans les cas des fonctions incomplètement spécifiées le procédé exposé aura une utilité plus saillante, car il rend possible de recouvrir l'ensemble  $V$  sans la détermination des implicants premiers (éventuellement d'un grand nombre), qui ne sont pas intéressés dans les recouvrements à coût minimal.

### Littérature

- [1] CHINAL, J., *Techniques booléennes et calculateurs arithmétiques*, Dunod, Paris, 1967.
- [2] KUNTZMANN, J., *Algèbre de boole*, Dunod, Paris, 1965.
- [3] PERRIN, J. P., M. DENOUE, E. DACLIN, *Systèmes logiques*, Tome I, Dunod, Paris, 1967.
- [4] NECULA, N. N., An algorithm for the automatic approximate minimisation of boolean functions, *IEEE Trans.*, v. C-17, 1968.
- [5] HOCKNEY, R. W., An intersection algorithm giving all irredundant normal forms from a prime implicant list, *I.R.E. Trans.*, v. EC-11, 1962, pp. 289—290.
- [6] ADÁM, A., *Truth functions and the problem of their realization by two-terminal graphs*, Budapest, 1968.
- [7] VARGA, T., *Matematikai logika kezdőknek*, I. Budapest, 1960.
- [7a] VARGA, T., *Mathematische Logik für Anfänger*, I. Berlin, 1965.
- [8] MCCLOSKEY, ED. T. C. BARTEE *A survey of switching circuit theory*, McGraw-Hill, New York, 1962.

(Recomposé le 30. janvier 1971)

## On the semigroup of automaton mappings with finite alphabet

By P. DÖMÖSI

Let  $F(X)$  denote the free semigroup generated by a (non-empty) finite set  $X$ , and consider the set  $K_x$  of all automaton mappings of  $F(X)$  into itself. It has been shown (see [4] and [6]) that  $K_x$  is a semigroup under the usual multiplication of mappings. It is also known that the subgroup  $A_x$  consisting of all one-to-one mappings from  $K_x$  has cardinality of continuum provided  $X$  has at least two elements (see [1]). This implies that neither  $A_x$  nor  $K_x$  has any finite generating system.

Let  $G_x$  and  $L_x$  denote the group and semigroup, respectively, of all automaton mappings of  $F(X)$  into itself induced by finite automata (see [4] and [6]). It has been proved in [2] that  $G_x$  and  $L_x$  have no finite generating system (except for the trivial case). In this paper we show that neither  $K_x$  nor  $L_x$  has any minimal generating system provided  $X$  has more than one element. It is an unsolved problem whether  $A_x$  and  $G_x$  have any minimal generating system.

Before proving our statement, we introduce some notions and notations.

First of all we assume that  $F(X)$  has the identity element  $e$ . By the *length*  $|p|$  of a word  $p \in F(X)$  we mean the number of all occurrences of elements from  $X$ . (Thus  $|e|=0$ .) We say that a word  $q$  is an *initial part* of  $p$  if there exists an  $r \in F(X)$  such that  $qr=p$ , this situation is denoted by  $q \subseteq p$ . If  $q$  is a proper initial part of  $p$ , i.e.  $q \subseteq p$  and  $|q| < |p|$  then we use the notation  $q \subset p$ .

Take two non-empty sets  $X$  and  $Y$ . A mapping  $\varphi$  of  $F(X)$  into  $F(Y)$  is called *automaton mapping* if for any  $p \in F(X)$ ,  $|p| = |\varphi(p)|$  and  $\varphi(pq) = \varphi(p)r$  hold where  $r$  is a suitable word in  $F(X)$  (see [3]). It is well-known that every automaton mapping can be induced by automaton and conversely.

Consider an arbitrary automaton mapping  $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$  and let  $p \in F(X)$ . If for a  $q \in F(X)$ ,  $\varphi(pq) = \varphi(p)r$  hold then let us denote this  $r$  by  $\varphi_p(q)$ . Let  $\psi: F(X) \rightarrow F(Y)$  be a mapping for which  $\psi(q) = \varphi_p(q)$  ( $q \in F(X)$ ) holds. This  $\varphi_p$  is called a *state* of  $\varphi$  induced by  $p$ . It should be noted that every state of an automaton mapping is an automaton mapping.

We say that  $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$  is an automaton mapping *with finite alphabet* if  $\varphi$  is an automaton mapping and  $X$  and  $Y$  are finite. An automaton mapping with finite alphabet is *finite* if it has finitely many different states. It is known from [3] that an automaton mapping is finite if and only if it can be induced by a finite automaton. Thus the semigroup  $L_x$  consists of all finite automaton mappings.

Let  $X$  be an arbitrary non-empty finite set and consider the semigroup  $K_x$  of all automaton mappings of  $F(X)$  into itself. Take  $\varphi \in K_x$  and let  $I(\varphi)$  denote the

set of all  $p \in F(X)$  for which there exist  $x_1, x_2 \in X$  with  $x_1 \neq x_2$  such that  $\varphi_p(x_1) = \varphi_p(x_2)$ . Consider the set  $J(\varphi)$  of all words  $p$  from  $I(\varphi)$  whose each proper initial part  $q$  satisfies the condition  $q \notin I(\varphi)$ . If  $e \in I(\varphi)$  then let  $J(\varphi) = \langle e \rangle$ .

The following holds.

**Lemma.** If  $p \notin J(\varphi^{(1)})$  and  $\varphi^{(1)}(p) \notin J(\varphi^{(2)})$  then  $p \notin J(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)})$  for any  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \in K_x$  and  $p \in F(X)$ .

*Proof.* By the definition of  $I(\varphi)$ , it can easily be seen that  $p \in I(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)})$  if and only if  $p \in I(\varphi^{(1)})$  or  $\varphi^{(1)}(p) \in I(\varphi^{(2)})$ . Therefore, if  $p \notin I(\varphi^{(1)})$  and  $\varphi^{(1)}(p) \notin I(\varphi^{(2)})$  then  $p \notin I(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)})$ , i.e. in this case our Lemma is valid because  $J(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}) \subseteq I(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)})$ .

Assume that  $p \in I(\varphi^{(1)}) \setminus J(\varphi^{(1)})$ . Then, by the definition of  $J(\varphi^{(1)})$ ,  $p$  has a proper initial part  $q$  such that  $q \in I(\varphi^{(1)})$ . Therefore,  $q \in I(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)})$ , i.e. taking into consideration  $q \subset p$ , we get  $p \notin J(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)})$ .

It remains to be shown that our Lemma is valid in the case of  $\varphi^{(1)}(p) \in I(\varphi^{(2)}) \setminus J(\varphi^{(2)})$ . Let  $r \subset \varphi^{(1)}(p)$  denote a proper initial part of  $\varphi^{(1)}(p)$  for which  $r \in I(\varphi^{(2)})$ . (By the definitions of  $J(\varphi^{(2)})$  and  $I(\varphi^{(2)})$  there exists such  $r$ .) Thus there exists a proper initial part  $q$  of  $p$  such that  $\varphi^{(1)}(q) = r$ . Therefore, by  $\varphi^{(1)}(q) \in I(\varphi^{(2)})$  we have  $q \in I(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)})$ . Since  $q \subset p$  this means that  $p \notin J(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)})$  which completes the proof of the Lemma.

We have the following

**Theorem.** If  $X$  is a finite set having at least two elements then neither  $K_x$  nor  $L_x$  has any minimal generating system.

*Proof.* Let  $K$  be a generating system of  $K_x$  or  $L_x$ . First we show the existence of a  $\varphi \in K$  for which  $J(\varphi)$  has at least two elements.

Let  $L$  denote the set of all elements  $\varphi$  from  $K$  for which  $J(\varphi)$  has only one element. Take arbitrary elements  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)} \in L$ . Using our Lemma it can be proved by induction that  $J(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\dots\varphi^{(n)})$  has at most  $n$  elements.

Let  $x_i \in X$  be fixed. We define a mapping  $\psi \in L_x$  as follows:

$$\psi_p(x) = \begin{cases} x & \text{if } p \in F(\langle x_i \rangle), \\ x_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Since  $J(\psi)$  is infinite thus  $\psi$  cannot be given as a product of mappings from  $L$ . Therefore,  $K \setminus L$  is not empty, i.e. there exists a  $\varphi \in K$  such that  $J(\varphi)$  has at least two elements.

Let  $p_1, p_2 \in J(\varphi)$  different words such that

$$|p_1| = \min_{q \in J(\varphi)} |q| \quad \text{and} \quad |p_2| = \min_{q \in J(\varphi) \setminus \langle p_1 \rangle} |q|. \quad (1)$$

Take two mappings  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$  from  $K_x$  defined as follows. For any  $p \in F(X)$  and  $x \in X$ , let

$$\varphi_p^{(1)}(x) = \begin{cases} \varphi_p(x) & \text{if } p_1 \subseteq p, \\ x & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

and

$$\varphi_p^{(2)}(x) = \begin{cases} x & \text{if } p_1 \subseteq p, \\ \varphi_p(x) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$



Let us show that a)  $\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}=\varphi$ , b)  $\varphi^{(1)}$  and  $\varphi^{(2)}$  can be given as products of elements from  $K\setminus\langle\varphi\rangle$  and c) if  $\varphi\in L_x$  then  $\varphi^{(1)}$  and  $\varphi^{(2)}$  are in  $L_x$ .

To prove our theorem, by the choice of  $\varphi$ , it is enough to show that a)—c) are valid.

By the definition of automaton mappings it is obvious that a) holds.

In order to prove b) it is enough to show that whenever  $\varphi$  is among  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)} (\in K)$  then  $\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\dots\varphi^{(n)}\notin\langle\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\rangle$ . In other words, for any pair  $\psi^{(1)}, \psi^{(2)} (\in K_x)$ ,

$$\psi^{(1)}\psi^{(2)}\neq\varphi^{(1)} \quad (4)$$

and

$$\psi^{(1)}\psi^{(2)}\neq\varphi^{(2)}. \quad (5)$$

By (1), for each word  $q (\in F(X))$  with  $|q|<|p_1|$  we have  $q\notin I(\varphi)$ . Thus, using (2) and (3) we get  $q\notin I(\varphi^{(1)})\cup I(\varphi^{(2)})$  provided  $|q|<|p_1|$ . Therefore, if there exists a  $q\in F(X)$  with  $|q|<|p_1|$  and  $q\in I(\psi^{(1)}\psi^{(2)})$  then (4) and (5) holds. If such  $q$  does not exist then for arbitrary  $p\in F(X)$  with  $|p|=|p_1|$  there is an  $r\in F(X)$  such that  $\varphi_{\psi^{(1)}(r)}=\varphi_p$ .

For a given  $\psi\in K_x$ , let us denote by  $I(k, \psi)$  the number of all elements from  $I(\psi)$  of length  $k$ . Then, taking into consideration the fact that  $p\in I(\varphi^{(1)}\varphi^{(2)})$  if and only if  $p\in I(\varphi^{(1)})$  or  $\varphi^{(1)}(p)\in I(\varphi^{(2)})$  we get  $I(|p_1|, \psi^{(1)}\varphi)\cong I(|p_1|, \varphi)$ . In the same way we get

$$I(|p_1|, \psi^{(1)}\varphi\psi^{(2)})\cong I(|p_1|, \varphi). \quad (6)$$

By (3) it is obvious that  $p_1\notin I(\varphi^{(2)})$ . On the other hand, by (1),  $p_1$  and  $p_2$  are in  $J(\varphi)$ , i.e.  $p_1\subseteq p_2$ . Thus, taking into consideration (2) we get  $p_2\notin I(\varphi^{(1)})$ .

If  $|p_1|=|p_2|$  then  $I(|p_1|, \varphi^{(1)}), I(|p_1|, \varphi^{(2)})<I(|p_1|, \varphi)$  because of  $p_1, p_2\in J(\varphi)(\subseteq I(\varphi))$ . This, by (6), means that  $I(|p_1|, \varphi^{(1)}), I(|p_1|, \varphi^{(2)})<I(|p_1|, \psi^{(1)}\varphi\psi^{(2)})$ . Therefore, in this case (4) and (5) hold.

Let  $|p_1|<|p_2|$ . Then, by (1)  $I(\varphi)$  has no word of length  $|p_1|$  except for  $p_1$ . Since  $p_1\notin I(\varphi^{(2)})$  thus, by (3),  $I(|p_1|, \varphi^{(2)})=0$ , i.e.  $I(|p_1|, \varphi^{(2)})<I(|p_1|, \varphi)$ . Therefore, by (6), (5) holds in this case too.

We now show that (4) holds if  $|p_1|<|p_2|$ . As has been shown it can be assumed that  $q\notin I(\psi^{(1)}\varphi\psi^{(2)})$  if  $|q|<|p_1|$  because in the opposite case (4) holds. Thus  $q\notin I(\psi^{(1)})$  holds as well, that is, for every word  $r\in F(X)$  of length less than or equal to  $|p_1|$  there exists a  $t\in F(X)$  such that  $\psi^{(1)}(t)=r$ . Therefore,  $\psi^{(1)}(p_1)\neq p_1$  implies  $\psi^{(1)}(s)=p_1$  for a suitable  $s\in F(X)$  with  $s\neq p_1$ . In this case  $s\in I(\psi^{(1)}\varphi\psi^{(2)})$  because of  $p_1\in I(\varphi)$ . On the other hand, by  $|p_1|=|s|$  and (2),  $p_1\neq s$  implies  $r\notin I(\varphi^{(1)})$  from which (4) follows.

Now suppose that  $\psi^{(1)}(p_1)=p_1$ . Let us write  $p_2$  in the form  $p_2=pr$  where  $|p|=|p_1|$ . We can assume that there exists a word  $q\in F(X)$  such that  $\psi^{(1)}(q)=p$  (because, as has been shown, in the opposite case (4) holds). Moreover, by (1),  $p_1\subseteq p_2$ , that is,  $p\neq p_1$ . Since  $\psi^{(1)}(p_1)=p_1$  thus  $p\neq\psi^{(1)}(p_1)$ . This, by  $\psi^{(1)}(q)=p$ , means that  $q\neq p_1$ . Therefore, for arbitrary  $s\in F(X)$  we have  $\varphi_q^{(1)}(s)=s$ , i.e.  $qs\notin I(\varphi^{(1)})$ . Thus if for  $p_2(=pr)$  there exists no word  $r_1\in F(X)$  such that  $\psi_q^{(1)}(r_1)=r$  then (4) holds, because in this case there is a word  $r_2\in F(X)$  with  $qr_2\in I(\psi^{(1)}\varphi\psi^{(2)})$ . Now assume that  $\psi_q^{(1)}(r_1)=r (r_1\in F(X))$ . Then  $qr_1\in I(\psi^{(1)}\varphi\psi^{(2)})$  because of  $p_2\in I(\varphi)$ . Therefore, (4) holds.

Thus we have got that (4) and (5) are valid in all possible cases, i.e. b) holds.

It remains to be shown that c) is valid. It is clear that the number of all states of  $\varphi p_1$  is less than or equal to that of all states of  $\varphi$ . Therefore, using (2) and (3) we get that both  $\varphi^{(1)}$  and  $\varphi^{(2)}$  have finitely many different states. Thus  $\varphi \in L_x$  implies  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \in L_x$ . This completes the proof of our Theorem.

### References

- [1] Чакань, Б., Ф. Гечег, О группе автоматных подстановок, *Кибернетика*, 1:5, 1965, pp. 14—17.
- [2] Гечег, Ф., О группе взаимно однозначных преобразований, определенных конечными автоматами, *Кибернетика*, 1:1, 1965, pp. 37—39.
- [3] Глушков, В. М., Абстрактная теория автоматов, *Успехи Мат. Наук.*, v. 16, 1961, pp. 3—62.
- [4] Хорейц Й., Преобразования, определенные конечными автоматами, *Проблемы кибернетики*, v. 9, 1963, pp. 23—26.
- [5] RANEY, G. N., Sequential functions, *J. Assoc. Comput. Mach.*, v. 5, 1968, pp. 177—180.
- [6] Заровный, В. П., Автоматные подстановки и сплетения групп, *Кибернетика*, 1:1, 1965, pp. 29—36.

(Received October 30, 1971)

## Zu den Ungleichungen der Informationstheorie

Von W. KÄMMERER

Die Ungleichungen für Verbundquellen

$$H(Y/X) \leq H(Y)$$

und

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$$

werden üblicher Weise mittels der für konvexe Funktionen geltenden Jensenschen Ungleichung bewiesen.

Hier wird ein direkter Beweis über Extremwertbestimmung dargeboten. Dieser Weg erscheint didaktisch empfehlenswert, da er die gleiche Methode benutzt, die im allgemeinen bei der Bestimmung des Extremwertes der Entropie einer Quelle schon zuvor verwendet wird. Betrachtet werden zwei Quellen  $X$  und  $Y$  mit den Wahrscheinlichkeitsfeldern  $p_i$  und  $q_j$ . Gefragt wird nach dem Extremwert der bedingten Entropie  $H(Y/X) = - \sum_i \sum_j p_i q_{ji} \ln q_{ji}$  bezüglich der zwischen den Quellen bestehenden Abhängigkeit — sie wird durch das bedingte Wahrscheinlichkeitsfeld  $q_{ji}$  charakterisiert — bei festgehaltenem  $p_i$  und  $q_j$ .

Die Extremwertbestimmung ist somit unter den Nebenbedingungen

$$\sum_i p_i q_{ji} = q_j \quad (j=1, \dots, m)$$

und

$$\sum_j q_{ji} = 1 \quad (i=1, \dots, n)$$

durchzuführen.

Mittels der Lagrangeschen Multiplikatoren

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \quad \text{und} \quad \mu_1, \dots, \mu_n$$

erhält man als Funktional

$$L = - \sum_i \sum_j p_i q_{ji} \ln q_{ji} - \sum_j \lambda_j (\sum_i p_i q_{ji} - q_j) - \sum_i \mu_i (\sum_j q_{ji} - 1).$$

Partielle Differentiation nach  $q_{ji}$  liefert das Gleichungssystem

$$\frac{\partial L}{\partial q_{ji}} = -p_i \ln q_{ji} - p_i - \lambda_j p_i - \mu_i = 0, \quad \text{für } i=1, \dots, n \quad \text{und} \quad j=1, \dots, m.$$

Die Auflösung nach  $q_{ji}$  liefert

$$q_{ji} = e^{-1-\lambda_j - \frac{\mu_i}{p_i}} = e^{-1-\lambda_j} \cdot e^{-\frac{\mu_i}{p_i}}.$$

Summation über  $j$  liefert unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$\sum_j q_{ji} = 1$$

$$e^{-\frac{\mu_i}{p_i}} \sum_j e^{-1-\lambda_j} = 1.$$

Daraus resultiert

$$e^{-\frac{\mu_i}{p_i}} = \text{const.} \quad \text{und weiter, daß auch}$$

$$q_{ji} = \text{const} \cdot e^{-1-\lambda_j} \quad \text{unabhängig von } i \text{ ist.}$$

Aus den weiteren Nebenbedingungen

$$\sum_i p_i q_{ji} = q_j \quad \text{folgt dann}$$

$$q_{ji} = q_j.$$

Dies ist aber die Aussage, daß der Extremwert dann angenommen wird, wenn die Quelle  $Y$  nicht von der Quelle  $X$  abhängt. Die bedingte Entropie geht dann in die Entropie  $H(Y)$  über. Aus den zweiten partiellen Ableitungen von  $L$  ist zu entnehmen, daß der erhaltene Extremwert ein Maximum ist. Somit gilt

$$H(Y/X) \leq H(Y).$$

Addiert man beiderseits  $H(X)$ , so erhält man, da

$$H(X) + H(Y/X) = H(X, Y)$$

ist,

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y).$$

(Eingegangen am 19. Dez. 1970)

## Verkehrskybernetik I: Automatische Bremse

Von D. MUSZKA und E. VIDA

Der gewöhnliche Ausdruck für die Verkehrsmenge ist

$$N = \frac{3600 v}{L}, \quad (1)$$

wobei  $N$  die Zahl der durchfahrenden Kraftfahrzeuge [n/St],  $v$  die Geschwindigkeit der Kraftfahrzeuge [m/sec], und  $L$  [m] der Abstand zwischen den Kraftfahrzeugen ist.

Dieser Ausdruck, der in der Verkehrsforschung oft angewandt wird, enthält implizite solche Zusammenhänge, deren Erkenntnis nur durch weitere Interpretationen ermöglicht wird.

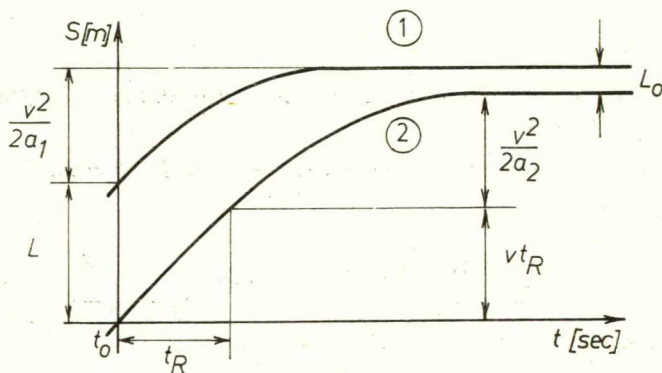


Abb. 1

Das Kraftfahrzeug ① fährt vorn und im Abstand  $L$  folgt ihm das Kraftfahrzeug ②. Wir nehmen an, daß sich alle zwei Kraftfahrzeuge mit derselben Geschwindigkeit  $v$  gleichförmig bewegen. ① beginnt im Zeitpunkt  $t_0$  zu bremsen Abb. 1. Nach  $t_R$  (Reaktionszeit) beginnt auch ② zu bremsen. Nehmen wir an, daß alle zwei bis zum Stoppen sich gleichmäßig verlangsamen. Es sei  $L_0$  der Abstand zwischen den schon gestoppten Kraftfahrzeugen.

Aus dem Abb. 1 ergibt sich unmittelbar der folgende Ausdruck für  $L$ .

$$L = vt_R + \frac{v^2}{2a_2} + L_0 - \frac{v^2}{2a_1}, \quad (2)$$

wobei  $a_1$  die Beschleunigung [m/sec<sup>2</sup>] des Kraftfahrzeuges ① und  $a_2$  die Beschleunigung [m/sec<sup>2</sup>] des Kraftfahrzeuges ② ist.

$L$  eingesetzt in (1) ergibt:

$$N = \frac{3600 v}{L_0 + vt_R + \frac{v^2}{2} \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right)} \quad (3)$$

Die Effektivität der Bremskonstruktion eines mit der Verzögerung  $a$  [m/sec<sup>2</sup>] bremsenden Kraftfahrzeuges ist

$$\eta = \frac{a}{a_{\max}},$$

wobei  $a_{\max} = \mu g$ , die größte prinzipiell erreichbare Verzögerung ( $\mu$  ist der Reibungskoeffizient,  $g$  ist die Gravitationsverzögerung) ist.

Somit ist  $a = \eta \mu g$ ; d.h.  $a_1 = \eta_1 \mu g$  und  $a_2 = \eta_2 \mu g$ , wobei  $\eta_1$  die Effektivität der Bremskonstruktion des Kraftfahrzeuges ① und  $\eta_2$  die Effektivität der Bremskonstruktion des Kraftfahrzeuges ② ist. Setzt man diese Ausdrücke in (3) ein, so erhält man

$$N = \frac{3600 v}{L_0 + vt_R + \frac{v^2}{2\mu g} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 \eta_2}} = \frac{3600 v}{L_0 + vt_R + v^2 c}, \quad (4)$$

mit der Abkürzung  $c = \frac{1}{2\mu g} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 \eta_2}$ .

Es sei  $v_{\text{opt}}$  die Geschwindigkeit, bei der die Permeabilität des Straßenstreifens den Maximalwert annimmt.

Wir wollen  $v_{\text{opt}}$  bestimmen, darum müssen wir den Differentialquotienten  $\frac{dN}{dv}$  gleich 0 setzen.

$$\frac{dN}{dv} = 3600 \frac{L_0 + vt_R + v^2 c - v(t_R + 2vc)}{(L_0 + vt_R + v^2 c)^2} = 3600 \frac{L_0 - v^2 c}{(L_0 + vt_R + v^2 c)^2} = 0. \quad (5)$$

Damit ergibt sich

$$L_0 - v^2 c = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichung hat reelle Lösungen nur dann, wenn  $c > 0$ , d.h. wenn  $\eta_1 > \eta_2$  ist. (Im Falle  $\eta_1 \leq \eta_2$  ist in (5) der Dividend immer  $> 0$ , also  $\frac{dN}{dv} > 0$ , d.h.  $N$  wächst streng monoton mit  $v$ , wir können also nicht von  $v_{\text{opt}}$  sprechen. Jedoch kann der Fahrer des Kraftfahrzeuges ② nicht wissen, was für eine Effektivität die Bremskonstruktion des Kraftfahrzeuges ①, das vor ihm fährt, hat, deshalb soll er — sicherheitshalber — mit dem für ihn ungünstigeren Fall  $\eta_1 > \eta_2$  rechnen.)

Dann hat man

$$v_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{L_0}{c}} = \sqrt{2\mu g L_0 \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 - \eta_2}}. \quad (7)$$

Wir müssen zeigen, daß  $N$  für diesen Wert von wirklich den Maximalwert annimmt. Dies ergibt sich daraus, daß infolge von (5)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 N}{dv^2} &= 3600 \frac{(-2vc)(L_0 + vt_R + v^2c)^2 - 2(L_0 - v^2c)(L_0 + vt_R + v^2c)(t_R + 2vc)}{(L_0 + vt_R + v^2c)^4} = \\ &= -7200 \frac{vc(L_0 + vt_R + v^2c) + (L_0 - v^2c)(t_R + 2vc)}{(L_0 + vt_R + v^2c)^3},\end{aligned}$$

also in dem Fall  $v = v_{\text{opt}}$  wegen (6) und infolge von unserer Voraussetzung  $c > 0$

$$\frac{d^2 N}{dv^2} = -7200 \frac{vc(L_0 + vt_R + v^2c)}{(L_0 + vt_R + v^2c)^3} = -7200 \frac{vc}{(L_0 + vt_R + v^2c)^2} < 0$$

gilt. (7) eingesetzt in (4) ergibt mit Rücksicht darauf, daß in dem Fall  $v = v_{\text{opt}}$  wegen

(6)  $v^2c = L_0$  und somit  $\frac{L_0}{v} = vc$  gilt

$$\begin{aligned}N_{\text{max}} &= 3600 \frac{v_{\text{opt}}}{L_0 + v_{\text{opt}}t_R + L_0} = 3600 \frac{v_{\text{opt}}}{2L_0 + v_{\text{opt}}t_R} = 3600 \frac{1}{\frac{2L_0}{v_{\text{opt}}} + t_R} = \\ &= \frac{3600}{t_R + 2v_{\text{opt}}c} = \frac{3600}{t_R + 2c\sqrt{\frac{L_0}{c}}} = \frac{3600}{t_R + \sqrt{4L_0c}} = \frac{3600}{t_R + \sqrt{\frac{2L_0}{\mu g} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 \eta_2}}}.\end{aligned}\quad (8)$$

Der Fahrer des Kraftfahrzeuges ② soll mit dem Fall rechnen, der für ihn ungünstig ist, d.h. daß die Effektivität der Bremskonstruktion des Kraftfahrzeuges ① den Maximalwert  $\eta_1 = 1$  hat.

Zur Abkürzung sei  $\eta_2 = \eta$ , und wir setzen in den Ausdrücken (7) und (8) die gewöhnlichen Werte von  $L_0$  und  $g$  ein (es sei  $L_0 = 5$  m und  $g = 10$  m/sec<sup>2</sup>). Dann bekommen wir

$$v_{\text{opt}} = 10\sqrt{\mu \frac{\eta}{1-\eta}} = 10\sqrt{\mu} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} \quad (9)$$

und

$$N_{\text{max}} = \frac{3600}{t_R + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}} \quad (10)$$

Der Ausdruck (10) ist ein bemerkenswertes Ergebnis. Hieraus ersieht man unmittelbar, daß die Permeabilität eines Straßenstreifens von der Reaktionszeit, dem Reibungskoeffizienten und von der Effektivität der Bremskonstruktionen abhängt.

Im allgemeinen nehmen wir für  $t_R$  den Wert 1 sec an. (Nach allen Verfassern.) Der gewöhnliche Wert für  $\eta$  ist 0,75. Somit hat man in dem Nenner des Ausdrucks (10) eine Summe der Gestalt

$$t_R + p = 1 + p, \quad \text{mit } 0 < p < 1.$$

Die Grundfrage der Verkehrstechnik ist heute die: Wie kann man die Permeabilität der Straßen erhöhen? D.h. Wie kann man den Wert  $p$  vermindern?

Bisher bemühte man sich immer  $p$  zu vermindern. (Z. B. in der neuesten Straßenbautechnik, in der Reifenerzeugung und im Kraftfahrzeugbau.) Darum war das Augenmerk immer nur auf  $p$  gerichtet, weil man den Eindruck hatte, daß man  $t_R$  — als subjektiven Parameter — niemals eliminieren kann.

Der Ausdruck (10) gab uns die Idee, ein System zu konstruieren, das in bestimmten Fällen, im richtigen Zeitpunkt und im richtigen Maß maschinell (d.h. ohne Hilfe des Fahrers) zu bremsen gestattet, natürlich ohne  $t_R$ . Mit Hilfe eines solchen Systems könnte man den Wert  $N$  bedeutend erhöhen.

Im folgenden stellen wir unsere Betrachtungen über ein solches System dar.

Der Fahrer des Kraftfahrzeuges ② wird eine visuelle Information von 1 bit von der Bremslampe des Kraftfahrzeuges ① bekommen, sobald der Fahrer des Kraftfahrzeuges ① zu bremsen beginnt. Es gibt keine weiteren Informationen über die Intensität der Verzögerung. Das ist vielleicht der größte Fehler der gegenwärtigen Bremskonstruktionen! Das Nervensystem des Fahrers des Kraftfahrzeuges ② wird nur einen „Startimpuls“ von der Bremslampe des Kraftfahrzeuges ① bekommen, und von diesem Zeitpunkt an muß er auch zu bremsen beginnen und dabei beobachten, wie der Abstand zwischen den zwei Kraftfahrzeugen sich vermindert, um dementsprechend entweder stärker oder schwächer zu bremsen und so den richtigen Abstand  $L_0$  einstellen zu können.

Es ist bemerkbar, daß diese Tätigkeit im menschlichen Nervensystem — im allgemeinen im menschlichen Körper — ein Regulationsprozeß ist. Wir können diesen Regulationsprozeß in einer anderen, maschinellen Konstitution simulieren, die im folgenden kurz zusammengefaßt werde.

Es sei im Kraftfahrzeug ① als Signalquelle ein Sender mit einer Grundfrequenz etwa im Bereich von 1000 MHz und hinten auf dem Kraftfahrzeug eine Senderantenne mit einer Nadelcharakteristik angebracht. Entsprechend sei im Kraftfahrzeug ② ein Empfänger und vorn eine Empfängerantenne untergebracht. Damit haben wir einen Signalkanal, mit dem die „Startimpulse“ in irgendeiner Kodierung übertragen werden können. Der Empfänger des Kraftfahrzeuges ② wird auf den „Startimpuls“ hin einen „Bremsbefehl“ für einen geeigneten Bremsservomechanismus geben. Dabei hat man aber nur eine Einheitsinformation (1 bit).

Im folgenden dürfen wir natürlich nicht an eine „strenge“ Simulation der menschlichen Tätigkeit denken; z. B. daran, daß der Abstand zwischen den zwei Kraftfahrzeugen und dessen Änderung mit einem Radarsystem oder mit einem Ultraschallsystem gemessen wird. Dieses wäre nur sehr kompliziert und kostspielig durchzuführen. Aber wir müssen den Ausdruck (3) beachten: Dort haben die Beschleunigungen  $a_1$  und  $a_2$  eine wichtige Rolle gespielt, die nun eine Idee für eine Lösung geben.

Wir müssen im Kraftfahrzeug ① dessen Verzögerung  $a_1$  messen. Das Meßgerät soll ein Analogausgangssignal geben, durch das der Sender moduliert wird. So können wir alle Informationen über den Bremsprozeß des Kraftfahrzeuges ① in den Empfänger des Kraftfahrzeuges ② übertragen. Wir werden also an dem Ausgang des Empfängers des Kraftfahrzeuges ② das Analogsignal der Verzögerung  $a_1$  praktisch gleichzeitig bekommen.

Der Bremsservomechanismus des Kraftfahrzeuges ② kommt nach dem „Bremsbefehl“ in Betrieb. Dementsprechend wird das Kraftfahrzeug ② auch eine — wachsende — Verzögerung  $a_2$  haben. Wir müssen auch diesen Wert (ebenso, wie den Wert  $a_1$ ) messen. Das Meßgerät soll auch hier ein Analogausgangssignal geben.



Also haben wir an dem Ausgang des Empfängers ein Analogsignal für den Wert  $a_1$  und an dem Ausgang des Meßgeräts ein Analogsignal für den Wert  $a_2$ . Diese zwei Signale werden mit Hilfe eines Differentialverstärkers verglichen.

Der Bremsservomechanismus soll solange im Betrieb bleiben, also die Bremskraft erhöhen, bis an dem Ausgang des Differentialverstärkers das Signal den Wert Null erreicht. Dieser Wert bedeutet, daß alle beiden Kraftfahrzeuge gleichwertige und gleichzeitige Verzögerung haben, daß sich also der Abstand zwischen den Kraftfahrzeugen bis zum Stop nicht mehr ändern wird.

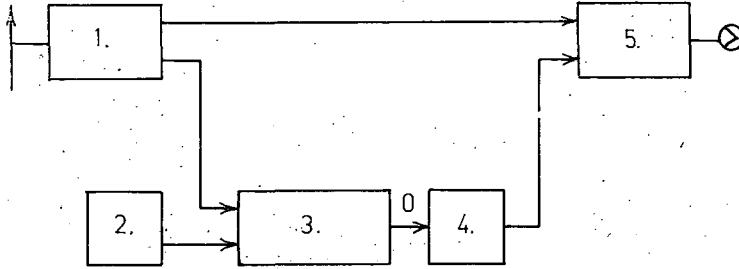


Abb. 2

- |                              |                                       |
|------------------------------|---------------------------------------|
| 1. Empfänger,                | 3. Differentialverstärker,            |
| 2. Meßgerät für Verzögerung, | 4. Auf „0“-Wert prüfender Stromkreis, |
| 5. Bremsservomechanismus.    |                                       |

Bei diesem Schema nahmen wir an, daß die Funktionen  $a_1(t)$  und  $a_2(t)$  streng monoton wachsende Funktionen sind und die hintereinanderfahrenden Kraftfahrzeuge immer bis zum Stop bremsen werden. Aber in der Praxis kann sich bei einem Bremsprozeß der Wert der Verzögerung erhöhen und vermindern und das Ende eines Bremsprozesses ( $a_1=0$ ) bedeutet nicht unbedingt Stop. Deshalb müssen wir statt der Einheit 4. (Abb. 2) eine andere Einheit anwenden, die auch die Abweichung von Null nach Richtung und Größe berücksichtigen und dementsprechend den Bremsservomechanismus regulieren kann (praktisch mit dem Differentialverstärker zusammengebaut).

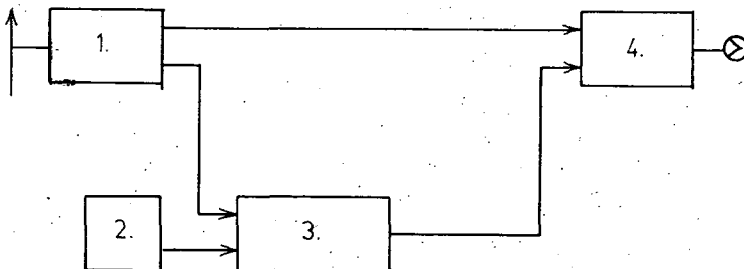


Abb. 3

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| 1. Empfänger,                | 3. Einheit zur Berücksichtigung und Regelung, |
| 2. Meßgerät für Verzögerung, | 4. Bremsservomechanismus.                     |

Zum Schluß soll noch bemerkt werden, daß das Kraftfahrzeug ② auch einmal die Rolle des Kraftfahrzeuges ① übernehmen kann. Darum müssen wir dieses neue Schema durch einen Sender und eine Senderantenne ergänzen:

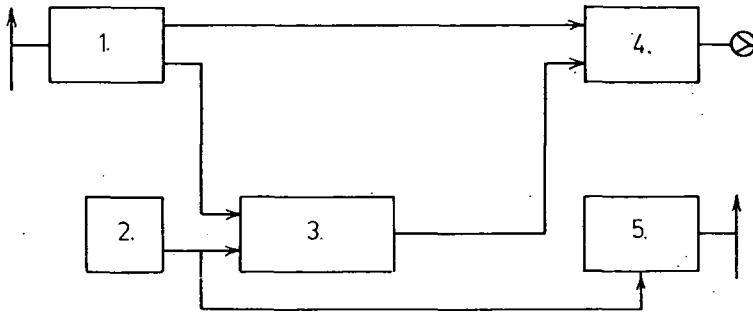


Abb. 4

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| 1. Empfänger,                | 3. Einheit zur Berücksichtigung und Regelung, |
| 2. Meßgerät für Verzögerung, | 4. Bremsservomechanismus,                     |
|                              | 5. Sender.                                    |

Wir haben unser System versuchsweise für zwei PKW nach diesem letzten Schema realisiert. Die Erfahrungen der Versuche sind überraschend gut geworden. Der Wert

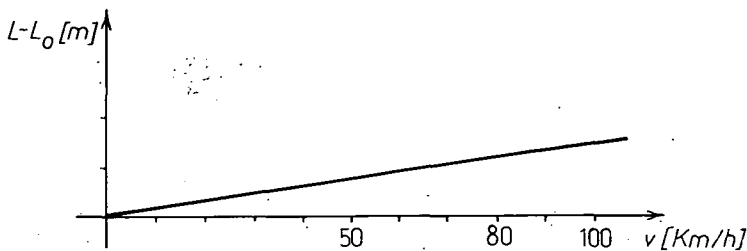


Abb. 5

$L - L_0$  ist ungleich Null da der Bremsservomechanismus eine bestimmte Betriebszeit hat.

(Eingegangen am 23. Sept. 1971)

## Sur des problèmes de formation et de recherche en informatique

Par L. ILIEV

1. La science mathématique élabore des modèles de phénomènes réels. Ses notions premières sont d'images des propriétés substantielles de l'objet dont elle s'occupe. De plus, chaque connaissance acquise est aussi objet de recherche, donc, nous dirons que dans les recherches mathématiques on peut partir de phénomènes «plus concrets» ou «plus généraux», réalisant ainsi un degré d'abstraction «plus bas» ou «plus haut». Réfléchissant dans ses modèles les propriétés et les relations des phénomènes, la mathématique élabore sa langue symbolique au moyen d'opérations sur les notions mathématiques. Mais, la possibilité d'obtenir des applications importantes et constantes des mathématiques s'élargit seulement dans le cas où l'appareil des opérations atteint un plus haut degré dans son évolution. La découverte du calcul différentiel et intégral, avec sa langue et ses opérations, est un très grand pas marquant une époque dans l'évolution de la science, mais ce n'est qu'après avoir bâti l'appareil des équations différentielles, que la mathématique a pu montrer ses possibilités dans ce domaine. Le développement et les applications de la mathématique, l'amélioration de sa langue et de son appareil ont posé des problèmes liés à la nécessité d'étudier et de fonder cet appareil en même temps que le problème de la construction logique des modèles mathématiques, comme par exemple le passé nous a légué les modèles de la géométrie il y a deux mille ans.

Il a été établi que certaines puissantes méthodes mathématiques s'élaborent à l'aide d'opérations et de relations algébriques et de l'appareil des processus infinis, lui-même étant déterminé par les notions de limite et de continuité. C'est ainsi que l'algèbre et la topologie ont posé la base sur laquelle ont été construites les sciences mathématiques. Quand on bâtit un modèle mathématique d'une façon logique et axiomatique, en partant d'un certain «degré d'abstraction» — de certaines notions — nous tâchons d'établir quelles sont, parmi toutes ces notions, les «notions fondamentales» à l'aide desquelles on peut déduire, simplement par la logique formelle, toutes les propriétés du modèle donné. C'est ainsi qu'on construit une théorie, un modèle abstrait, une structure mathématique. Il faut noter que la méthode axiomatique ne se réduit pas seulement à une déduction des propriétés de la structure à partir des «propriétés fondamentales», mais, il faut supposer une «abstraction préliminaire», c'est-à-dire trouver certaines propriétés substantielles, parmi les relations et les objets de la réalité objective, qui sont «plus concrètes» ou appartiennent à un «plus haut degré d'abstraction». Pouvoir discerner les propriétés mathématiques substantielles parmi le labyrinthe d'une variété donnée, voici un des cas où

se manifeste l'adresse, l'«intuition», la création mathématique. Une des caractéristiques des mathématiques modernes est que la méthode axiomatique est devenue un appareil constant d'investigation mathématique.

Une fois établis les éléments de l'appareil mathématique, l'appareil des opérations algébriques, l'appareil de la topologie et la méthode axiomatique elle-même, un nouveau problème s'est dégagé: celui de diviser la mathématique en structures abstraites et de les ordonner suivant leur degré d'abstraction de manière croissante. On a déterminé comme structures fondamentales les structures algébriques les structures des espaces ordonnés et les structures topologiques. Grâce à elles, on édifie les structures multiples et spéciales. Avec cette nouvelle ordonnance des structures mathématiques, le champ des sciences mathématiques s'est élargi car les structures fondamentales devinrent plus générales. En même temps, dans ce champ agrandi, on trouve des «taches blanches», qui, plus tard, se comblèrent de nouvelles sciences mathématiques — des structures.

Un des phénomènes fondamentaux des mathématiques contemporaines est de construire des structures mathématiques. Pour pouvoir révéler l'importance de ce phénomène dans l'évolution de la science moderne il faut tenir compte de certains faits:

Supposons, tout d'abord, qu'en partant de certains phénomènes réels, nous puissions construire un modèle abstrait de ces phénomènes qui réfléchisse leur propriétés principales. Ce modèle abstrait sera plus simple que les phénomènes réels. Donc, nous pourrions étudier ce modèle, grâce aux méthodes existantes, et établir des lois qui sont dissimulées dans les phénomènes réels, parce que ceux-ci sont envahis par une multitude de propriétés non-substantielles. Ainsi, grâce au modèle abstrait, nous pouvons trouver de nouvelles propriétés dans les phénomènes.

Maintenant, au contraire, supposons construite une structure, et qu'il existe des objets et des phénomènes réels qui la réalisent, c'est-à-dire que la structure ait pour réalisation un modèle isomorphe. Dans ce cas, nos objets auront aussi toutes les propriétés qui découlent de la structure. Il peut y avoir beaucoup de réalisations mais, il ne sera pas nécessaire d'étudier leurs propriétés car celles-ci sont données par les propriétés de la structure. Cette circonstance conduit à des applications qui sont à la base de la science et du progrès technique modernes.

Donc, en général, on peut dire que *la réalisation d'un modèle, appartenant à un domaine donné, par les moyens d'un autre domaine, est une application du premier domaine dans le second.*

Ainsi, les structures peuvent être appliquées pour l'essor du domaine auquel elles appartiennent, à l'évolution d'autres sciences, de la technique etc...

*Dans le cas où la réalisation d'un modèle dans un domaine donné se passe constamment et algorithimiquement, on peut dire que ce modèle est introduit ou appliqué en pratique.*

La construction des structures abstraites est une activité intellectuelle élevée qui hausse le niveau de l'activité scientifique et de la pensée humaine.

Le problème de la construction des structures se transmet des mathématiques aux autres sciences, dans les arts etc... Bien sûr, leur image, aussi que les phénomènes se développant là, y sont expliqués par la vision que l'on a adoptée.

La construction des structures mathématiques a de l'importance pour l'évolution des sciences mathématiques, pour l'évolution des autres sciences, pour la réalisation

tions de grandes applications, ainsi que pour augmenter le niveau de la pensée humaine et l'essor culturel de la société.

Les structures mathématiques édifiées de façon formelle et logique sont des modèles mathématiques universels qui peuvent être réalisés par différents moyens et être appliquées dans toutes les sciences.

En tenant compte de tout cela : *le problème de la construction et de la réalisation des structures mathématiques est extrêmement actuel dans la création mathématique contemporaine. Mais avec l'évolution des nouveaux domaines des mathématiques et de la technique de calcul ce problème acquiert une nouvelle signification et un nouveau contenu.*

Pouvoir établir des isomorphismes avec une structure mathématique quelconque, voilà une possibilité extrêmement puissante de la prévision scientifique et des importantes applications, possibilité qui est assez fréquente, car chaque structure a un nombre infini des réalisations de toutes espèces. Ainsi, par exemple, on a trouvé à notre époque que le schéma des opérations arithmétiques en système binaire, la table des valeurs véridiques de la disjonction et de la conjonction dans la logique mathématique et certains schémas diodiques sont des modèles isomorphes. Ainsi, on obtient immédiatement le principe de l'élaboration des machines à calculer électroniques qui réalisent des opérations mathématiques et logiques. De cette manière on arrive à une application de la mathématique et de la logique mathématique dans la technique qui apporte un progrès technique important. En général la construction de chaque nouveau schéma triguère dans le domaine de la technique de calcul est un problème de construction d'un schéma logique et de sa réalisation.

Les calculateurs électroniques modernes réalisent des structures mathématiques. La Mathématique est à la base de la technique de calcul contemporaine. C'est ce qui constitue le deuxième phénomène fondamental, déterminant les tendances des mathématiques modernes.

L'essor de la technique des calculateurs électroniques dépend de l'évolution des certaines structures mathématiques — logiques, étant à la base de cette technique. Mais aussi, l'exploitation de la technique de calcul dépend de l'évolution du très complexe appareil mathématique : les langues algorithimiques, les translateurs, les algorithmes, les programmes. Ainsi a été conçu un complexe de nouvelles sciences mathématiques, représentant en lui-même une direction, que l'on appelle en langue mathématique moderne «l'assurance mathématique des machines électroniques».

Cependant à tout ce que nous venons de dire il faut encore ajouter ceci : Les machines à calculer modernes sont des machines à action programmée. Elles sont capables d'exécuter les programmes de certains algorithmes, c'est-à-dire de certains processus cybernétiques. Au contraire, pour pouvoir assurer l'exécution, sur un calculateur électronique, d'un processus cybernétique naturel ou artificiel, il est nécessaire de trouver son algorithme. Les algorithmes sont des modèles mathématiques de ces processus cybernétiques qui peuvent être modélés sur des machines à calculer. (A l'encontre, par exemple, des processus cybernétiques en bionique qui peuvent être modélés à l'aide d'autres moyens, sans modèles mathématiques.) Dans ce sens, donc, la mathématique est aussi, à la base de l'étude des processus cybernétiques qui sont programmés sur les machines électroniques. En général, les possibilités.

des calculateurs électroniques posent d'une nouvelle manière le problème du modelage mathématique.

En tenant compte de ce que nous venons de dire, on peut caractériser les possibilités modernes des mathématiques de la manière suivante:

a) L'appareil des structures mathématiques — les structures fondamentales, multiples et spéciales — a atteint un niveau exceptionnellement élevé et accompli. A l'aide de cet appareil, on attaque intensivement les problèmes et on obtient de nouveaux résultats.

b) Cette méthode axiomatique est devenue une méthode constamment active, un appareil des mathématiques modernes, pour l'élaboration des structures mathématiques.

c) Étant la base de la construction de la technique des calculateurs électroniques, les mathématiques transforment l'exploitation de ces machines en une puissante méthode mathématique d'investigation des modèles mathématiques et des processus cybernétiques.

Les applications constantes de ces moyens des mathématiques contemporaines démontrent leur haut degré d'*universalité*.

Tout cela nous mène à cette conclusion: *la mathématique moderne a à sa disposition un appareil puissant de création et de réalisation de modèles mathématiques.*

2. Les structures de la mathématique classique furent obtenues surtout par le traitement des modèles mathématiques dans le domaine des sciences physiques, traitement qui s'effectuait en augmentant progressivement l'abstraction. L'amélioration et la transformation en méthode mathématique de la méthode de construction des structures mathématiques, la découverte des machines à calculer et le degré de développement des autres sciences, tout cela mène à la possibilité de construire des modèles mathématiques dans tous les domaines de la connaissance humaine. De nos jours les modèles et les méthodes mathématiques s'appliquent, par exemple en biologie, en économie etc... de la même manière qu'elles s'appliquaient naguère en physique. Maintenant la mathématique se trouve en proche parenté avec certaines sciences comme elle l'était déjà avec la physique. L'étude, à l'aide de moyens mathématiques, des modèles mathématiques appartenant à un certain domaine d'une science donnée, peut s'appeler: «mathématisation» de ce domaine. Ce phénomène appelé mathématisation des sciences a un rôle immense pour l'évolution de toutes les sciences et en premier lieu pour les sciences mathématiques.

La «mathématisation des sciences» est un phénomène courant dans la mathématique moderne qui détermine les tendances générales et les directions de son évolution.

Notons qu'il n'est pas possible d'étudier, à l'aide de l'appareil mathématique existant et des structures actuelles qui, elles, sont obtenues pour la plupart du temps en développant les modèles de la physique, tous les modèles obtenus en observant les phénomènes des autres sciences.

En liaison avec cela, il est nécessaire de rappeler certains phénomènes observés pendant l'évolution des mathématiques:

Les mathématiques servent les formations sociales-historiques en modelant les phénomènes de l'époque étudiée grâce aux moyens mathématiques dont elles disposent alors. C'est dans le processus de cette action que sont conçues des nouvelles structures universelles qui préparent le modelage des nouveaux phénomènes durant la période suivante. Ainsi, les mathématiques furent, en proportion des pro-

blèmes du temps, une force productrice dans la réalisation du progrès des époques successives.

Durant la première époque de son évolution — de l'antiquité jusqu'à la découverte du calcul différentiel et intégral — la mathématique, en modelant tout d'abord les problèmes de mesure des grandeurs, créa la géométrie d'Euclide et la science des nombres. A cette époque, l'axiomatisation ne fut atteinte qu'en géométrie euclidienne. La théorie des nombres fut exprimée axiomatiquement longtemps après que la mathématique fut entrée dans l'époque suivante de son évolution. En tenant le modèle près de son original (la réalité), les mathématiciens de la première époque le complèterent non pas de façon formelle-logique, avec les conséquences de ce qui avait été déjà introduit deductivement, mais par de nouvelles images des propriétés de l'original. Ainsi d'une part, ils obtinrent des découvertes importantes et d'autre part, ils accumulèrent suffisamment de matériaux pour effectuer une correction logique, une mise en scène axiomatique. Par ce moyen on obtint des découvertes exceptionnelles au début de l'époque suivante — après la découverte du calcul différentiel et intégral. La puissante méthode de ce calcul donna, grâce à son application immédiate à certains phénomènes, des résultats si importante qu'on laisse de côté la question de la clarté formelle-logique, qui d'ailleurs n'était pas dans les possibilités de cette époque. Le modèle et l'original étaient si près l'un de l'autre, la liaison entre les mathématiques et la réalité si vive, que la noncontradiction logique des nouvelles notions et connaissances par rapport à celles déjà existantes, paraissait, par elle-même, évidente. Mais, petit à petit, en accumulant un nombre considérable des résultats, en développant de toutes nouvelles sciences mathématiques vers le milieu de siècle passé, vint en premier lieu le problème du fondement formel-logique des théories mathématiques. Ce problème, qui peu à peu, grandit et se transforme en problème de l'élaboration axiomatique des sciences mathématiques, il fallait transformer la méthode axiomatique en appareil mathématique constant créer la structure des structures mathématiques. De plus, toute une série d'«images», employées dans le passé, fut exclue des sciences mathématiques pour des raisons de non-fondement formel-logique. Perdant ainsi la fraîcheur de certains objets et méthodes, les branches mathématiques et la mathématique entière arrivent à une structure beaucoup plus complète. En lignes générales, ce processus se manifeste vers la première moitié de ce siècle et nous pouvons donc dire qu'alors finit la deuxième époque de l'évolution des mathématiques.

Avec l'introduction des problèmes de la cybernétique, l'édification d'une technique de calcul et grâce à l'héritage des deux premières époques de l'évolution des mathématiques, se formèrent les possibilités de construire et réaliser des structures mathématiques, telles que celles dont nous avons montrées l'existence aux points a), b) et c). Ces possibilités des mathématiques modernes marquent le début d'une nouvelle époque dans leur évolution et leur application. Elles assurent aussi les possibilités modernes du modelage mathématique. Le début de cette nouvelle époque ressemble et ressemblera encore longtemps aux débuts des deux autres époques. La mathématique «rafraichit» son objet et ses méthodes en introduisant des «images» des objets de nouveaux modèles, ignorant pour la plupart du temps le fondement formel-logique des modèles mathématiques. On a et on aura encore beaucoup d'importants résultats et de découvertes. Souvent, certains font la conclusion suivante: de cette façon seront épuisées les nouvelles possibilités; elles ne portent pas en elles-mêmes les éléments de la création mathématique.

Indépendamment de ce qu'elles sont en contradiction avec toute évolution historique des mathématiques, qu'elles interprètent d'une façon bornée le processus créateur, ces conclusions aussi sont contraires aux faits déjà formés.

Il a été noté que seulement que, que modèles dans les différentes sciences peuvent être étudiés à l'aide de l'appareil mathématique existant et des structures mathématiques. C'est ce qui explique la nécessité du développement d'un nouvel appareil mathématique, de nouvelles structures.

Ainsi, nous arrivons à un appareil mathématique et à des structures mathématiques entièrement neuves. La possibilité d'obtenir des structures, non-isomorphes aux existantes, ouvre des perspectives exceptionnelles devant la création mathématique. En même temps, la plupart des modèles, qu'on étudie dans les différentes sciences, sont des modèles de processus de direction. C'est ainsi que s'accumulent les possibilités d'évolution de la cybernétique dans tous ses aspects.

Il s'est formé un complexe de nouvelles sciences mathématiques, représentant lui-même une direction qu'on appelle l'assurance mathématique des machines, à calculer.

L'assurance mathématique de la technique de calcul se développe en mathématiques durant la deuxième moitié du 20<sup>ème</sup> siècle et est à la base d'importantes conquêtes, grâce aux quelles notre époque se distingue nettement.

L'évolution de l'assurance mathématique de la technique de calcul est liée étroitement au développement et aux applications de la logique mathématique. Mais, jusqu'à présent, on employait seulement les opérations algébriques sur les éléments logiques. La nature des processus, objets de ces études, stipule une évolution future de la logique mathématique et en premier lieu l'introduction d'une topologie.

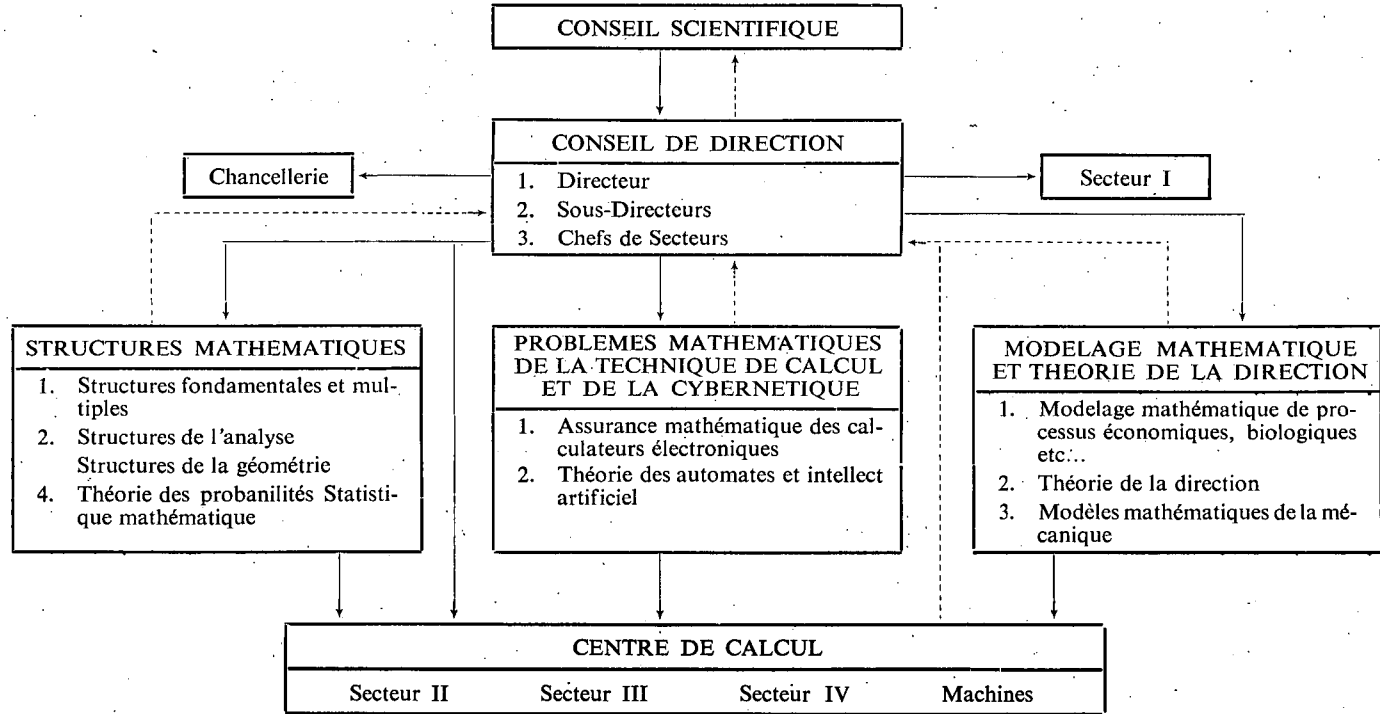
D'autre part, la complexité exceptionnelle des modèles mathématiques modernes des différentes sciences stipule catégoriquement la nécessité de leur traitement au moyen des calculateurs modernes. Cela mène à la nécessité de les exprimer en une langue entièrement différente des langues existantes; l'élément de base de cette nouvelle langue est l'algorithme et son programme. L'élaboration d'une nouvelle langue formelle en mathématiques est une des caractéristiques de l'étape actuelle de l'évolution des mathématiques. Il est évident que cette langue devra avoir son appareil mathématique, par exemple son algèbre et sa topologie. Certains\* pensent que jusqu'à la fin du 20<sup>ème</sup> siècle le travail créatif des mathématiciens sera dirigé, en général, vers la construction de l'algèbre et la topologie de cette langue et aussi, naturellement, de la langue elle-même. C'est un des pronostics fondamentaux d'une importance capitale pour les mathématiques. Si nous essayons d'extrapoler et de dépasser le cadre de cette période, nous devons alors affirmer qu'après, viendra la période d'axiomatisation de l'appareil de cette langue à l'aide d'algorithmes fondamentaux «évidents» ou de programmes. Cette période sera alors la période de la conquête de l'«intelligence artificielle».

En dernier lieu, notons que l'élaboration d'une nouvelle langue mathématique et de son appareil a de l'influence sur l'évolution de toutes les branches des mathématiques, de la mathématique en entier. D'autre part, peu à peu, s'accumulera la possibilité d'employer la technique de calcul dans l'évolution de toutes les branches

---

\* Voir V. M. Gluskov. Conférence sur la théorie des automates et de la pensée artificielle. Tachkent, 27—31 mai 1968.





— canal de communication des directions

- - - canal de communication des informations

**STRUCTURE**  
de la Faculté de Mathématiques de l'Université de Sofia

Bloc d'étude		Année scolaire	Profil universitaire pour les enseignants	Structures mathématiques					Modélage mathématique	Mécanique mathématique	Qualification à la fin de la 3ème et de la 5ème année
B	5	4							Théorie des automates et programmation	Recherche opérationnelle	
	Algèbre										
A	3	2	1						Quelques différences dans les cours de base	Cours de base sur les directions fondamentales des mathématiques	Spécialiste mathématicien
Mathématicien diplômé à profil et à spécialisation											

Centre de Calcul

←

←

←

des mathématiques. Ceci à son tour aura de l'influence sur la mathématique en entier.

Nous venons de toucher l'aspect mathématique de la construction des structures abstraites, l'évolution de la technique de calcul, la cybernétique et le modelage mathématique. A la base de ces phénomènes de la société moderne se trouve la mathématique: leur évolution emploie les résultats et les méthodes des mathématiques, mais, en principe, ils naissent, et leurs problèmes sont à la base de l'évolution d'autres sciences et de la société en entier. Quand un problème, appartenant, par exemple, à une autre science, est posé suffisamment clairement, on peut le formuler mathématiquement et obtenir un modèle mathématique. S'il existe une structure mathématique isomorphe à ce modèle, alors le modèle aura les propriétés de la structure — on a une application immédiate des mathématiques dans la science donnée. Si par contre pour un modèle donné, il n'y a pas de structure mathématique isomorphe, alors se pose le problème d'élargir une des structures ou de construire une nouvelle structure mathématique. Ainsi, les problèmes de la science donnée enrichissent les structures mathématiques. C'est dans ce sens que les phénomènes tels que, la technique de calcul, la cybernétique et le modelage mathématique, agrandissent le champ des structures mathématiques. Ils forment des directions correspondantes dans lesquelles sont obtenus de nouveaux domaines et méthodes mathématiques et finalement de nouvelles structures. Ce processus bilatéral d'application des connaissances mathématiques et de leur élargissement dans l'accomplissement de leur application a toujours accompagné l'évolution des mathématiques tout le long de leur histoire jusqu'à nos jours. Dans les différentes époques, le cycle de ses actions s'agrandissant et ne passait, il n'y a pas longtemps, que par la mécanique, la physique et la technique, tandis qu'aujourd'hui il embrasse presque toutes les sciences et les phénomènes actuels de la vie de la société.

Nous donnons sur les schémas annexés la structure actuelle de l'Institut de Mathématiques à Centre de Calcul de l'Académie Bulgare des Sciences et le projet d'évolution ultérieure de la structure de la Faculté de Mathématiques de l'Université de Sofia. Durant l'élaboration de ces projets ont été retenues et prise en considération les tendances de l'évolution de mathématiques.

A l'avenir, la théorie des probabilités et la statistique mathématique de la première direction et les modèles mathématiques de la mécanique de la troisième direction dans l'Institut de Mathématiques formeront des directions indépendantes dans la structure de l'Institut.

*(Reçu le 13. mai 1970)*



## Резюм статей первого тома Acta Cybernetica

### Линейные регулярные языки. I—II

Г. Т. Херман

Часть I рассматривает проблему анализа линейных последовательностных сетей. Задается алгоритм при помощи которого можно написать некоторое регулярное выражение всякого языка, представимого в таких сетях. Доказывается, что любой линейный регулярный язык является в известном смысле регулярным, но наоборот, существуют регулярные языки, которые не будут одновременно линейными регулярными языками.

В части II пишется алгоритм синтеза линейных последовательностных сетей, позволяющий решить о том, является ли заданный регулярным выражением регулярный язык линейным регулярным, и если это так, то как построить линейную последовательностную сеть, представляющую этот язык. Доказываются также теоремы о линейной реализации автоматов.

HERMAN, G. T., *Linear regular languages*, Part I, 1969, pp. 3—12, Part II: The problem of synthesis, 1971, pp. 41—56.

### Возможность принципиального устранения рекурсивных (повторных) процессов программного языка Алгол 60

Р. Петер

Также, как в вычислительную машину введенные данные, так и выходящие из неё результаты можно кодировать естественными числами. Работа машины сводится всегда к вычислению одной — иногда возможно неопределенной — функции теории чисел. С такой идеализацией (подобные которой всегда имеют место, когда вырабатывается широкая математическая теория для практических вопросов), что ёмкость памяти вычислительной машины не ограничена, можно доказать, что функции теории чисел, рассчитанные вычислительной машиной, равны частичным рекурсивным функциям. Известные виды рекурсии могут быть сформулированы на программном языке Алгол 60 только так называемыми рекурсивными процессами (сюда относя и симультанные процессы), а эти только одним «процессом развязки» могут быть переведены на машинный язык. В работе показывается, что такие процессы принципиально могут быть исключены из программ на языке Алгол 60. Это потому, что выше упомя-

нугому процессу «развязки» соответствует вид рекурсии такой новой формы, которая подходит для определения любой частичнорекурсивной функции, что, с точки зрения программирования, оказывается более простым, чем примитивная рекурсия (один вид однозначно определённой блочной диаграммы может быть построен и её можно перевести на рекурсивный процесс Алгол 60, а для примитивных рекурсий это не справедливо).

PÉTER, R., *Die prinzipielle Ausschaltbarkeit der rekursiven Prozeduren aus der Programmierungssprache Algol 60*, 1972, pp. 219—231.

### Двойной автомат “pushdown” и контекстно чувствительная грамматика

Д. Ревес

За последнее время для понятия “pushdown” автомата много различных обобщений появилось в специальной литературе. Так, среди других, ввели понятия “two-way pushdown” и автомат “stack”. Они оказались полезными вспомогательными средствами при исследовании принципиальных действий трансляционных програм. В данной работе введено понятие “dual pushdown” автомата, которое представляет собой естественное обобщение оригинального понятия автомата “pushdown”, а преимуществом его является то, что он точно равносильный и с контекстно чувствительной грамматикой.

RÉVÉSZ, Gy., *Dual pushdown automata and context sensitive grammars*, 1972, pp. 147—151.

### О поведении некоторых циклически симметричных сетей

А. Адам—У. Клинг

В настоящей статье мы занимаемся следующим специальным типом сетей: точки графа обозначаются через  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ; существует число  $k$  ( $1 \leq k < n$ ) так, что из всякой точки  $P_i$  рёбра идут в точки  $P_{i-1}, P_{i-2}, \dots, P_{i-k}$  и только в эти (где вычитание разумеется mod  $n$ ). Продолжаем постоянное моделирование, введённое в разделе 3 работы [2]. Состояние  $\mathcal{U}$  такого графа называется циклическим, если существует такое положительное число  $p$ , что после временного интервала длины  $p$  состояние, возникающее из  $\mathcal{U}$ , равно состоянию  $\mathcal{U}$ . В разделе 1 различаем регулярные и иррегулярные состояния. В разделах 2—3 изучается функционирование графа с регулярным начальным состоянием, утверждается, что всякое регулярное состояние является циклическим. В разделе 4 занимаемся поведением сети с иррегулярным начальным состоянием; окончательный результат доказывает, что иррегулярное состояние не может являться циклическим.

- [2] ÁDÁM, A., *Simulation of rhythmic nervous activities, II. (Mathematical models for functions of networks with cyclic inhibition)* *Kybernetik*, v. 5, 1968, pp. 103—109.

ÁDÁM, A., U. KLING, *On the behaviour of some cyclically symmetric networks*, 1971, pp. 69—79.

## О некоторых обобщениях циклических сетей

А. Адам

Первые разделы статьи дают полное описание таких конечных связных ориентированных графов, которые содержат по крайней мере два цикла и в которых всякая точка и всякое ребро содержатся в (точно) одном или двух циклах. Обозначим через  $C_1$  класс этих графов. Пусть  $G$  — элемент класса  $C_1$  и  $k$  — число меньше чем длины циклов графа  $G$ . Обозначим через  $\mathcal{U}_k(G)$  граф с тем же множеством точек что и  $G$  так, что ребро  $\overline{AB}$  существует в  $\mathcal{U}_k(G)$  точно в том случае, если  $A \neq B$  и точка  $B$  из точки  $A$  достижима в  $G$  не больше чем через  $k-1$  ребра. Пусть  $C_2$  — класс каждого графов  $\mathcal{U}_k(G)$ , где  $G$  пробегает элементы класса  $C_1$ .

В последних разделах стремятся к обобщению исследований предыдущей работы [2] (о поведении сетей имеющих некоторую специальную структуру как графы). На графы принадлежащие к классу  $C_2$  не удаётся доказать все ожидаемые предположения, следовательно статья содержит и неразрешённые проблемы (как о структуре так и о поведении).

[2] ÁDÁM, A., U. KLING, On the behaviour of some cyclically symmetric networks, *Acta Cybernetica*, v. 1, 1971, pp. 69—79.

ÁDÁM, A., On some generalizations of cyclic networks, 1971, pp. 105—119.

## О некоторых вопросах перечисления деревьев и сетей типа дерева

А. Адам—Я. Бадьински

В третьем разделе изучаются некоторые вопросы перечисления корневых деревьев. Пусть  $T$  — дерево с корнем  $R$ , обозначается через  $k$  число рёбер дерева  $T$ . Разделим рёбра в классы путём следующего отношения: два ребра являются эквивалентными, если одно из другого достижимо без касания корня  $R$ . Если точно такие  $\kappa_i$  классы эквивалентности существуют, всякий из которых имеет  $i$  ребра (где  $i$  пробегает числа  $1, 2, \dots, k$ ), тогда скажем, что вектор  $K = \langle \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_k \rangle$  является партицией дерева  $T$ . Получаем три формулы для числа  $S_K(k)$  отмечаемых деревьев, имеющих партицию  $K$ , при условии, что отметка корня равна 1 и отметки других точек — числа  $2, 3, \dots, k+1$  (произвольно). Одна из этих формул по существу совпадает с теоремой (доказанной различным путём) J. Denes-а. Из наших результатов выводима и известная теорема Cayley (Следствие 1).

В разделах 4—5 корневному дереву  $T$  приписывается временное поведение в смысле модели предыдущей статьи [1], так что рёбра ориентируются в направлении корня и каждая точка  $P_i$  имеет произвольное значение  $\beta(P_i)$ , лежащее в интервале  $(0, 1)$ . Определим пять типов деревьев снабжённых начальными значениями, эти типы соответствуют пяти характеристическим возможностям поведения (Предложение 6). В разделе 4 изучаем вероятность того собы-

тия, что дерево принадлежит одному или другому типу, если дерево (как граф) и значение  $\beta(P_i)$  выбирается случайным образом.

- [1] ÁDÁM, A., Simulation of rhythmic nervous activities, II. (Mathematical models for the function of networks with cyclic inhibition) *Kybernetik*, v. 5, 1968, pp. 103—109.  
 ÁDÁM, A., J. BAGYINSZKI, On some enumeration questions concerning trees and tree-type networks, 1972, pp. 129—145.

### Построение $k$ -деревьев графа

И. Паво

В статье показанный метод относится к определению всех  $k$ -деревьев  $k$ -реберного графа, в которых в качестве компонента содержится точно одна заранее заданная точка. Строить такие части графов приходится, например, при анализе электрических сетей и при применении топологических формул.

Автор для генерации  $k$ -деревьев графа использует матрицу адияценсии и на первом шагу для искомого множества  $k$ -деревьев составляет элементы множества, более широкого частичного графа. Из частичных графов выбирает искомые  $k$ -деревья, применяя циклические исследования. Показывает, что в процессе построения каждое дерево выступает точно один раз. Наконец, способ можно распространить для построения  $k$ -деревьев неоднорёберных графов. Даже в специальных случаях ( $k=1$ ) метод определяет все деревья графа. Для описанного метода характерно, что гораздо больше использует понятий, положений из теории графов по сравнению с другими.

Если используем алгоритм, построенный по этому методу, для вычислительных машин, то весь этот процесс требует минимальную ёмкость памяти, так как кроме исходных данных нет необходимости в хранении промежуточных данных (например данных частичного графа). Данные полученных  $k$ -деревьев можно в процессе генерации непрерывно отпечатать.

PÁVÓ, I., *Generation of the  $k$ -trees of a graph*, 1971, pp. 57—68.

### Об одном алгоритме минимизации для булевых функций

Ф. Мориц

Логическое описание электрических цепей с одним выходом, использующих интегральные цепи из твёрдого тела в качестве простых элементов, приводит к нескольким нетрадиционным проблемам оптимизации, при которой требуется найти для любой данной булевой функции формулу, представляющую её с помощью зафиксированных простых булевых функций, и при этом требуется, чтобы формула была минимальна относительно заданной целевой функции.

В настоящей работе рассматривается алгоритм, который (в предположении, что целевая функция удовлетворит некоторому простому условию) ведёт к точному решению проблемы, причём ограниченное число шагов алгоритма, реализуемое на ЭВМ, даёт достаточно хорошее приближение решения.



Ввиду общей природы проблемы алгоритм описывается здесь в достаточно общем виде, который для каждого практического приложения должен быть конкретизирован согласно с данными простыми элементами и данной целевой функцией.

MÓRICZ, F., *On a minimization algorithm for Boolean functions*, 1971, pp. 97—103.

**Определение минимальных нормальных форм  
Булевых функций с применением правил минимизации,  
относящихся к зависимостям затрат**

Б. Папп

Данная статья содержит описание определения минимальной, дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формы, полностью или не полностью специфичных Булевых функций. Для этого используется тезис о первичных имплицитах, который доказывается в первой части. После этого выводится так называемая функция присутствия путём, отличающим от алгоритма Квайна Мак Клацки, без того, чтобы предположить знание всех первичных имплицитов. В дальнейшем определяется функция затрат и, фиксируя её общие свойства, определяются и правила минимизации затрат. С помощью этого производится определение минимальных нормальных форм. Действия наглядно поясняются на восьми различных примерах.

PAPP, B., *Procédé pour déterminer les formes normales minimales des fonctions booléennes, en utilisant les règles de minimisation de la fonction de coût*, 1972, pp. 241—250.

**Попытка описания селекционного процесса при помощи  
абстрактного автомата**

К. Беллманн—М. Гёссель

Рассматривается моделирование селекционного процесса как абстрактный линейный автомат. При этом вход и выход линейного автомата дифференция селекции (selection difference) и респонз (response) соответственно. Введётся макроскопическое абстрактное состояние популяции.

BELLMANN, K., M. GÖSSEL, *Versuch einer automatentheoretischen Beschreibung von Selektionsprozessen*, 1971, pp. 93—96.

**О полугруппах преобразования автоматом конечного алфавита**

П. Дёмёши

Пусть  $F(x)$  свободная полугруппа, генерируемая элементами не пустого конечного множества  $X$ , и рассмотрим по порядку полугруппы  $L_x$  всех преобразований  $F(x)$  самого в себя конечным автоматом, а также все полугруппы  $K_x$  преобразований автоматом.

В данной работе показано, что, если количество элементов конечного множества  $X$  больше одного (т. е. исключая очевидный случай), тогда для полугрупп  $L_x$  и  $K_x$  не существует минимальной системы генераторов. Вопрос и дальше остаётся открытым: существует ли подобное утверждение для групп всех взаимно однозначных отображений в  $L_x$  и  $K_x$ .

Dömösi, P., *On the semigroup of automaton mappings with finite alphabet*, 1972, pp. 251—254.

### Некоторые проблемы измерности ретроспективных последовательных функций

Л. Клукович

В этой статье мы занимаемся некоторыми отображениями множества всех бесконечных последовательностей элементов данного конечного алфавита. Такие отображения называются ретроспективными последовательными функциями.

Во множестве последовательностей мы определяем лебеговскую меру в естественном образе так, что меру пространства образа данной ретроспективной последовательной функции можно рассматривать количеством информации, сохраняющей автоматом, индуцирующим данную функцию.

В статье даются условия, при которых образ измерного множества является измеримым и изучаются значения меры образа. Далее покажем аналогию с теорией функций вещественного переменного.

Наконец, с помощью примера иллюстрируется то, что не существует тесной связи между алгебраическими и метрическими свойствами ретроспективных последовательных функций.

Klukovits, L., *Some measure problems concerning the retrospective sequential functions*, 1969, pp. 27—40.

### Проблемы теории размерности, относящиеся к ретроспективным секвенциальным зависимостям

А. Мате—Й. Сюч

Пусть  $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ ,  $Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ , где, очевидно,  $X_n$  означает принимаемое данным автоматом на  $n$ -ом шагу множество входных сигналов, а  $Y_n$  множество выходных сигналов на этом шагу. Функция  $f$  преобразования  $X$  в  $Y$  тогда называется ретроспективной секвенциальной зависимостью, или коротко  $RS$  зависимостью, если в случае каждого целого числа  $n$  первые  $n$  элементов ряда аргументов определяют первые  $n$  элементов ряда изображения. Зависимость  $RS$  такова, что её можно реализовать автоматами. Главное содержание этой работы состоит в том, чтобы определить какое заключение можно сделать насчёт поведения автомата в случае бесконечной последовательности входных сигналов, если известно, как реагирует автомат на конечную последовательность произвольных входных сигналов. С этой целью введём для

множеств  $X$ ,  $Y$ ,  $X_n$  и  $Y_n$  структуры: измеримости, размерности, топологическую и метрическую. Основной вопрос состоит в том: когда обеспечивается то, что зависимость  $RS$  функции  $f$  измерима, непрерывна, измеримые множества переносятся в измеримые и т. д. Такие утверждения удалось доказать при общих условиях. По ходу подтверждения этих доказательств важную роль играли элементарные положения об аналитических множествах. Всё же, в самом простейшем случае (т. е. когда  $X_n = Y_n$  для каждого  $n$  — двух элементарное дискретное пространство, далее, топология  $X$  и  $Y$  — топология произведения) не справедливо то, что  $RS$  функция каждого множества Бореля переносится во множество Бореля, как это показано на примере (но естественно то, что в данном случае изображение каждого множества Бореля является аналитическим множеством).

MÁTÉ, A., J. SZÜCS, *On measure-theoretic problems involving retrospective sequential functions*, 1971, pp. 81—89.

### Вопросы изучения и исследования вычислительной науки

Л. Илиев

В первой части статьи автор характеризует отношение между абстрактными математическими структурами и конкретными реальными явлениями. Он фиксирует, что математическое моделирование имеет новое содержание, отражающиеся в вычислительной технике и в идее вычислительной машины.

Во второй части статьи автор показывает, что настоящий уровень науки дает возможность математизировать каждую область человеческого познания. В этом играет большую роль развитие математики и вычислительной техники, требующее развертывание новых математических и языковых аппаратов.

Наконец, автор занимается организационными вопросами изучения и исследования, он излагает предложения относительно развития образования.

ILIEV, L., *Sur des problèmes de formation et de recherche en informatique*, 1972, pp. 263—271.

### О двух неравенствах теории информации

В. Кеммерер

Статья занимается двумя известными неравенствами теории информации. Обычные доказательства для этих неравенств, проведены с использованием неравенств типа Енсена (Jensen), относящихся к конвексным зависимостям. Доказательство же помещенное в статье использует мультипликаторный метод Лагранжа. Так выглядит с точки зрения дидактики, что новое доказательство имеет свои преимущества перед обычным.

KÄMMERER, W., *Zu den Ungleichungen der Informationstheorie*, 1972, pp. 255—256.

### Метод определения хронологического порядка археологических поселений

Аннамария Г. Варга

Цель этой работы заключается в том, чтобы дать метод, основанный на теории регрессии, для установления хронологического порядка археологических поселений.

Итак, мы соответствуем всякой паре поселений  $i, j$  одно неотрицательное действительное число  $X_{ij}$ , так, что бы  $X_{ij}$  измеряло подобие между поселениями  $i, j$ . Показано что число  $X_{ij}$ , как функция чисел  $i, j$ , индуцирует метрику на множестве поселений.

Применяя геометрию с расстояниями, выбираем те метрические пространства, которые можно поместить совпадающим образом в евклидову плоскость. После помещения используем теорию регрессии и определяем хронологический порядок поселений порядком ортогональных проекций на регрессионную прямую.

Полученный хронологический порядок принимаем только тогда, если корреляционный коэффициент близок к  $\pm 1$ .

Этот метод является естественным приближением хронологического порядка.

VARGA, G. ANNAMÁRIA, *A method for chronological ordering of archeological sites*, 1972, pp. 193—200.

### Моделирование предварительной обработки нервной информации, поступающей в кору мозжечка, с помощью вычислительных машин

А. Пеллионис

Из простой и правильной организации гранулированной зоны (zona granulari) мозжечка (cerebellum) можно предположить, что в ней происходит некоторая предварительная обработка информации, поступающей в мозжечок. Моховидные волокна проводят раздражение в glomerulus-ы мозжечка; если предположим, что они находятся в плоскости, тогда в поле glomerulus-ов в любой момент времени имеется образец раздражения в виде мозаики. Этот образец преобразуется в образец раздражения гранулированных клеток. На преобразование могут оказывать запретное влияние клетки Golgi. Для моделирования этой обработки информации сначала надо бы определить модель клеточной структуры гранулированной зоны. Структурная избыточность этой зоны подсказывает, что гранулированная зона мозжечка может играть роль подавления ошибок. Дальнейшее моделирование с помощью вычислительных машин было сделано с целью, чтобы понять результаты электрофизиологических испытаний. Моделированное явление — это влияние образца на степень запрета типа Golgi. Это явление нельзя объяснить, подходу с электрофизиологической стороны, но с помощью преобразования образцов раздражения его легко осмыслить.

PELLIONISZ, A., *Computer simulation of the information preprocessing in the input of the cerebellar cortex*, 1972, pp. 157—169.

**VIDEK: универсальное визуальное устройство ввода для ЭЦВМ**

Д. Муска—А. Шара

В последнее время значительно развивалась специальная область обмена данными и информацией с вычислительными машинами: непосредственный визуальный ввод информации. Разработанные оборудования в большей части служат для специальных целей (например, для заполнения бланков) или очень дорогие (например, оборудование по имени FIDAC).

В статье показано устройство ввода изображения "VIDEK" для универсальных целей, разработанное лабораторией кибернетики при университете имени Ёжефа Атиллы. Оборудование сравнительно по низкой цене и служит для непосредственного ввода в ЭЦВМ просвечивающихся или отражающих свет изображений с максимальными размерами  $240 \times 240$  мм. Максимальная разрешающая способность  $0,2 \times 0,2$  мм. В каждой точке изображения степень черноты характеризуется 1 битом информации. Скорость преобразования информации — 54000 бит/сек. Информация изображения может передаваться вычислительной машине в форме 5—8 битового параллельного кода.

Во второй части статьи знакомим с блочной схемой программ "VIDEKORD", которые преобразуют информацию изображения, введенную в машину, в форму, подходящую для дальнейшей её обработки. С помощью 1-ой программы "VIDEKORD" информация изображения преобразуется в колонно продольную форму, способную для горизонтальной обработки. С помощью программы "VIDEKORD-2" — из продольно колонной формы можно перейти в продольно строчную форму, способную для вертикальной обработки.

MUSZKA, D., A. SÁRA, *VIDEC: A universal visual input for digital electronic computers*, 1971, pp. 121—127.

**Автоматический тормоз**

Д. Муска—Э. Вида

Исходя из практики, просто можно показать, что пропускная способность одной полосы движения автомобильных дорог находится в зависимости от коэффициента трения, к. п. д. тормоза и от времени реакции водителя автомашины.

Статья показывает автоматическую систему, благодаря способности которой можно значительно увеличить пропускную способность полосы движения так, что в системе в процессе торможения время реакции водителя не играет роли. В системе информацию торможения впереди идущей машины (начальный момент времени торможения, изменение ускорения во времени) передают с помощью сигнального радиопередатчика следующей за ней машине, оборудованной приёмным устройством, которое затем приводит в действие исполнительный механизм тормоза. Тот в свою очередь, на основании сопоставления обоих ускорений «кодирует» изменения движения впереди идущей машины.

В статье приводятся результаты контрольных испытаний данной системы.

MUSZKA, D., E. VIDA, *Verkehrskybernetik*, I. Automatische Bremse, 1972, pp. 257—262.

### Моделирование лимфокинетики на электрических аналоговых моделях

З. Хантош

Измерение скорости потока даже в больших лимфостволах производится таким образом, что сам процесс измерения приводит к грубому нарушению состояния циркуляции лимфы. Специфичные условия давления и потока требуют применения моделирования.

Моделирование предусмотрено для гидродинамических явлений циркуляции лимфы. Как первый шаг была сконструирована принципиально-физическая модель, в которой видны все допущения и упрощения по сравнению с биологическим объектом. Уравнения, описывающие физическое поведение частичных систем модели (таких, как сердце; отрезки циркуляции крови: артериальные, капиллярные, венные; инерстициальная область, местная сеть лимфопутей, лимфостволы) показывают сходство с уравнениями, относящимися к электрическим цепям.

Построенными на основе такой аналогии электрическими моделями можно исследовать несколько основных вопросов циркуляции лимфы: локальное и центральное давление в венах и влияние факторов, определяющих транспортную способность лимфопутей, на циркуляцию лимфы.

HANTOS, Z. M., *Ein analog-elektrisches Modell zur Simulation der Lymphokinetik*, 1969, pp. 13—25.

### Методы пересекающихся плоскостей для решения задач не конвексного программирования

Ф. Форго

Автор предлагает методы для разрешения некоторых проблем специального нелинейного программирования. Общие свойства этих методов — применение ряда пересечений, что означает в каждом приближении отсечение гиперной плоскостью такой части возможного интервала, в котором значение целевой функции не может превысить того значения целевой функции, которое принимает участие в лучшем до этого шаге решения. Типы рассмотренных задач: максимализация квазиконвексного полиэдра, решение смещенного нуля конвексной целевой функцией интегрального программирования, решение проблем фиксированных затрат конвексной целевой функцией, разрешение проблем сепарации нелинейного программирования, общее непрерывное нелинейное программирование, общее чисто интегральное программирование.

FORGÓ, F., *Cutting plane methods for solving nonconvex programming problems*, 1972, pp. 172—192.

## **Outlines of the lectures delivered at the colloquium on "Cybernetical and Computing Methods in Medicine and Biology"\***

### **Data acquisition and processing in the physiological laboratory by means of hibrid computing techniques**

I. MADARÁSZ, L. SZEKERES

One of the characteristic features of the modern physiological, pharmacological, cardiological etc. laboratories consists of the appearing of a great quantity of output data produced by the ever growing number of different automatically working devices. In order to obtain the relevant informations needed for the solution of the given physiological problem, the question of adapting an adequate and optimized laboratory-level computing system arises. Taking into consideration the actual instrumentation possibilities (the relative low level of automatization in the laboratories, the lack of the universal desk computers in the market, etc.) — *a semi-automatized laboratory data acquisition, storing and computing system is described*, characterized by the use of different analog, hibrid and digital elements. The system has been developed in the electro-physiological laboratory of the Department.

The input elements of the system are: analog tape recorders, sampling unit and low-speed digital tape recorder. Informations from both type of the tape recorders can be read into the ferrit core of a multichannel amplitude analyser either by direct access to the memory, or by means of different wired-program peripheral devices. These are: averaging unit, multiscaler, amplitude- and intervall histogram measuring unit, digital period-analyser for the processing of electroencephalograms, ECG-curves, etc. Another access to the ferrit core memory consists of a low-speed punch-tape reader. The outputs are: printer, tape puncher, digital-to-analog converter with oscilloscope and  $X-Y$  plotter. The punch tapes can be used for different data processing purposes either in the laboratory or in a remote computing center, if needed.

DEPARTMENT OF PHYSIOLOGY, MEDICAL UNIVERSITY OF SZEGED

### **Telemetric transfer and processing of electrophysiological data**

L. KELLÉNYI

Abstract not received.

DEPARTMENT OF PHYSIOLOGY, MEDICAL UNIVERSITY, PÉCS

---

\* Authors' abstracts.

### Automatic evaluation of capnograms

I. SZEKERES, L. MURÁNYI, J. MATIEVICS

In the course of diagnostic and therapeutic procedures for the quantitative measurement of disturbance of the gas exchange, a new procedure was developed based on the formal analysis of the exhaled air-CO<sub>2</sub> curve (capnogram). The capnograms are characterized by the ratio of the frontal slope and the plateau slope. With the aim of automatizing the mass evaluation of the curves, the authors constructed a digital-operated apparatus controlled by an analogue-digital converter; this measures the capnogram amplitude at 0.04 sec intervals, transforms the obtained values to digital ones and controls the tape-punching apparatus. This records the data on punched tape in an 8-bit binary code. It is possible to use two types of coding procedure: by means of manual keying the examination daily serial number and a few notes, and automatic punching of the code combinations necessary for the machine programme. This information is recorded at the middle of the final stage of the capnogram. The information formed from the analogue signal can be recorded on magnetophone tape and can be pre-selected with the help of an oscilloscope. By means of a digital-analogue converter, it is also possible to record the results of other laboratory measurement series. Using a machine programme, mass curve-evaluation and data-processing can be carried out by computer.

DEPARTMENT OF PEDIATRICS, MEDICAL UNIVERSITY;  
CLINICAL PHARMACOLOGICAL RESEARCH GROUP OF THE NATIONAL PHARMACOLOGICAL INSTITUTE;  
COMPUTING CENTRE OF THE MEDICAL UNIVERSITY, SZEGED

### Computer analysis of McFee-Parungao vectorcardiograms

M. CSANÁDY, P. HUNYA, T. GAÁL, M. HÖGYE, I. SZÁNTAI

The authors compare the data of heart catheterisation of 59 patients with QRS loops of vectorcardiograms (VCG) made about at the same time, processing by computer concerning right ventricular hypertrophy. Three haemodynamic parameters were examined: the pressure of the right ventricle, the total pulmonary resistance and the pulmonary blood flow. McFee-Parungao vectorcardiographic system was used.

The best correlations were found between *the pressure of the right ventricle* and the following VCG parameters: 1) the azimuth of 3/8 instantaneously vector (0.498), 2) the azimuth of max. QRS vector (0.495).

Comparing *the total pulmonary resistance* with the VCG data, 1) the quantity of forward position of the loop (0.510), 2) the ratio of the forward and backward positions of the loop (0.471), — proved to be the best ones.

In comparison with *the pulmonary blood flow* we got the best correlations with the quantity of forward position of the loop (0.310).

These results show significant correlation between the haemodynamical data and the VCG parameters, though the correlation coefficients are not very fine. The electrocardiographic (ECG) data — which were thought to be the best ones among ECG parameters — did not show any significant correlation with the haemodynamical data.

1<sup>st</sup> MEDICAL CLINIC, MEDICAL UNIVERSITY;  
LABORATORY OF CYBERNETICS, JÓZSEF ATTILA UNIVERSITY, SZEGED



### **Investigation of the distribution of labeled phosphate in the course of the in vitro metabolism of erythrocytes by model analysis**

L. LATZKOVITS, Cs. FAJSZI, I. SZENTISTVÁNYI

In the investigations presented the tracer kinetic model analysis of the in vitro phosphate metabolism of human erythrocytes has been performed. In the relatively short experiments applying Krebs-Ringer phosphate, only the acid-soluble phosphate compounds were labeled. Thus the closed system of the different phosphate pools could be represented by four compartments:

A: extracellular  $P_i$

C: "acid-labile" phosphate

B: intracellular  $P_i$

D: "acid-resistant" phosphate.

The amount of phosphate as well as the total- and specific activity were determined as functions of time in each of these compartments. For the model analysis the BRANSON equations were set up with the experimental data, according to each of the logically possible model variations including the four compartments, and were solved for rate values by applying a digital computer. Only one of the logically possible model variations proved to be able to provide real rate values. This model involves both  $P_i$  transport and exchange across the membrane as well as metabolic processes.

BRAIN RESEARCH INSTITUTE OF THE MEDICAL UNIVERSITY

BIOLOGICAL RESEARCH INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, SZEGED

### **Application of cybernetical and computing methods for capillary circulation studies**

Z. HANTÓŠ, P. HUNYA

Due to the structural features, the special flow relations in capillary systems can adequately be investigated by modelling procedures. Authors presented a theoretical model the construction of which is primarily directed towards the investigation of transmural fluid movements.

It is generally agreed that capillary filtration is determined by the hydrodynamic and oncotic pressure differences (Starling's theory). Transmural fluid movements produced by the pressure differences change the intravascular concentration and therefore the oncotic pressure of the plasma proteins. On the other hand, the hydrodynamic pressure is controlled by the changed viscosity.

A possible realization of the theoretical capillary model consists of non-linear differential equations the exact solutions of which are not known. Numerical methods were therefore applied to examine this model of distributed hydrodynamic parameters.

After constructing a lumped parameter model, the homogeneous units of the tube model can be considered as automata connected series to each other and parallel to the automaton representing the interstitial space.

Finally, a few results of the simulation and their possible physiological interpretation are presented.

LABORATORY OF CYBERNETICS, JÓZSEF ATTILA UNIVERSITY, SZEGED

### **Application of correlation-functions in the analysis of cardiovascular system**

E. MONOS, B. SZÜCS

The possibilities of application of correlation-functions in signal analysis and in dynamic system analysis were summarized. Using this techniques, the statistical features of some blood flow and pressure waves and their dynamic relationship were characterized quantitatively.

It was stated that pulsatile pressure changes can be regarded with a good approximation as stationary for a period of about 10 minutes. A well defined stochastic signal component could be detected on the pulsatile waves in most cases, the ratio of stochastic and periodic component however was much more smaller than in the case of the 3rd order pressure waves. By cross-correlation functions the velocity of pressure wave propagation was determined within a 1 msec limit. The dynamic relationship of arterial pressure changes and adrenal venous outflow could be well approximated with a transfer function of second order. The damping ratio of this system was always less than 1, which points to that oscillations could be manifested on the venous outflow.

EXPERIMENTAL RESEARCH DEPARTMENT, SEMMELWEIS MEDICAL UNIVERSITY;  
DEPARTMENT OF AUTOMATION, UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, BUDAPEST

### **The use of the computers in medical diagnosis; some practical guide for the clinicians**

R. SZABÓ

The physician's decisions in order to establish a diagnosis and to choose the optimal treatment can be easily simulated by a computer. But the computer can not substitute the physicians in collecting symptoms and signs, i.e. informations on the illness to be detected. The computer is unable also to check up the correctness of the diagnosis made by it.

The author discusses the conditions and pitfalls of collecting medical data, methodical problems of their feeding in the computer and in view of the physicians and patients enumerates some advantages resulting from the use of a computer.

2<sup>nd</sup> MEDICAL CLINIC, MEDICAL UNIVERSITY, SZEGED

### **Use of computers in solving the diagnostic problems of scintigraphic procedures**

L. CSERNAY, J. CSIRIK

Abstract not received.

1<sup>st</sup> MEDICAL CLINIC, MEDICAL UNIVERSITY, SZEGED

### **Computer simulation of the cerebellar cortex**

A. PELLIONISZ

A computer simulation method is applied to the cerebellar neuronal circuit, giving an opportunity to study the activity of many neurons simultaneously. As a morphological basis a schematic connection chart is deduced from the original neural net. As a next step the network is additionally simplified by placing all the five types of cerebellar neurons into two-dimensional fields. The patterns of excited neurons at a particular instant are handled as matrices. The excitation-matrices are consecutively transformed and displayed by the computer. Two simulations are discussed in the paper; the first one contains about 60 000 neurons, giving an opportunity to get an insight into the possible activities of large neuronal fields and to test structuro-functional hypotheses of the cerebellar cortex. The second model aims at analyzing experimental field-potential recordings by simulating the possible excitation-patterns set up on the neuronal fields under experimental circumstances. In this manner the "pattern sensitive" feature of Golgi-inhibition, which seems electrophysiologically ununderstandable, can easily be explained. At the end software- and hardware problems of the neuronal simulation are discussed.

INSTITUTE OF ANATOMY, MEDICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

### **An iterative method in the computer-aided scintigraphy**

J. CSIRIK, L. CSERNAY

A method of processing the data of a home-made scintigraph (Scintikart-Numerik) by digital computerization is described. Technical possibilities of data processing are surveyed. Outline of the mathematical program is presented and the time needed for data processing is indicated. Results of the control phantom examinations are reported. This procedure improved the diagnostic possibilities of cold nodules with the size of 2—4 cm by 60—80 per cent.

1<sup>st</sup> MEDICAL CLINIC, MEDICAL UNIVERSITY, SZEGED

### **The modelling of human motor process**

M. NEMESSURI, O. BIHARI, J. GALAMBOS, T. SZÁNTÓ, M. VADAY

Authors carried out the analysis of different motor actions as going, running, throwing, shooting and catching the ball, weight lifting and others. They used photokynography with normal, rapid and ultrarapid registration and EMG. They were searching for basic motor mechanisms respectively their reflections on EMG and photokynograms. The investigations suggest that the motor pattern of goal-directed movements is constructed from two elements: pulsion and traction. They are building the simple and complex movement patterns in extremely combined manner connected with each other parallel and in series.

HUNGARIAN INSTITUTE OF PHYSICAL EDUCATION, BUDAPEST

# Some remarks on the mathematical modelling of diagnostic methods

I. GYÓRI

These notes give a mathematical formulation of the problems of diagnosis and differential diagnosis in medicine. The formulation of the problem is followed by descriptions of well-known diagnostic methods, one based on Bayes's theorem and another, invented by Bykovskii, based on an information theoretical model. If the symptoms considered are not independent, then the application of both methods becomes very cumbersome. Hence the author also describes a method that can conveniently applied even in the case of interdependence of the symptoms, and which goes over into Bykovskii's method if the symptoms are independent.

COMPUTING CENTRE OF THE MEDICAL UNIVERSITY, SZEGED

## Examination of the distribution of synaptical vesicles in the motor end-plate of striated muscle by mathematical methods

P. HUNYA, S. BENSE, P. NAGY, B. CSILLIK

A mathematical method for characterizing the distribution of synaptical vesicles in the ending of an axon is given. It is used to make a comparison between two classes of electron microscope pictures of the neuromuscular junction:

In the mathematical model a picture is given by an ordered group  $A = A(G, g_1, g_2, f)$ , where  $G$  is a region corresponding to the axon on the picture,  $g_1$  and  $g_2$  are curves representing two parts of the boundary of  $G$  (presynaptical membrane and the remainder part of the boundary).  $f$  is a real function of two variables which describes the distribution of the synaptical vesicles in  $G$ . The picture  $A$  is transformed into the point  $M = (R, Q)$  of a two-dimensional space  $E^2$ . The first component is defined as the ratio

$$R = \frac{c_1}{c_2},$$

where

$$c_i = \frac{\int_{g_i} \int_G \frac{f(p)}{d(p, q)} dp dq}{\int_G dx dy} \quad (i = 1, 2)$$

expresses the accumulation of vesicles, at the membrane represented by  $g_i$ . (One can generalize the "measure"  $c_i$  based upon physical analogy in two directions, namely concerning the regions  $G$ ,  $g_i$  and the dimensions of the pictures.) The second component shows the mean number of vesicles in  $G$ :

$$Q = \frac{\int_G f(x, y) dx dy}{\int_G dx dy}.$$

Using the transformation given above, the two classes (stimulated and control classes) form two well separated regions in  $E^2$ . The physiological interpretation of this result is finally discussed and the possibility of the wide-range application of the method is explained.

LABORATORY OF CYBERNETICS, JÓZSEF ATTILA UNIVERSITY;  
DEPARTMENT OF ANATOMY, MEDICAL UNIVERSITY, SZEGED

### **Computer analysis of evoked potentials**

I. MÉSZÁROS, GY. IVÁNYI, Z. ZÁMORI

The mathematical analysis of evoked potentials is widely used in neurophysiological research. A new method, elaborated by the authors, makes possible data reduction by fitting Gauss-distribution curves upon measured data. Digitized responses are fed into the computer; the program fits the mathematical functions of positive and negative peaks through a defined number of iterations. The necessity of further iterations is controlled by the least-squares method. Results are printed and plotted as well, on the line-printer.

A second program enables the averaging of distinctly digitized evoked responses. Distribution of digitized values is displayed graphically and numerically upon each measured point of the averaged signal.

DEPARTMENT OF COMPARATIVE PHYSIOLOGY, EÖTVÖS LÓRÁND UNIVERSITY;  
CENTRAL RESEARCH INSTITUTE OF PHYSICS, BUDAPEST

### **A cybernetical program used for diagnostic purposes differentiating between various human colon diseases and those due to *Entameba histolytica***

G. PRÓNAY, P. HUNYA

Authors used for their investigations the experiences and data of 480 patients having a positive stool-sample concerning *Entameba histolytica*. With the help of probability methods using the Bayes-formula, as proposed by Ledley and Lusted, later modified by Wishnevsky and actually by one of the authors concerning the problems of their case-histories, authors tried to find differential diagnostic signs and syndromes with the help of which it would be more easy to differentiate between simple carrier-states and such clinical entities as irritable colon syndrome and idiopathic ulcerative proctocolitis combined with *Entameba histolytica* carrier-state and without it.

In their differential diagnostic program they made use of 13 diagnoses and 76 anamnestic data and physical signs, further on laboratory investigations. Authors suppose to have worked out — with the help of mathematical statistical methods — a better diagnostic procedure in detecting special syndrome-entities due to *Entameba histolytica*.

MUNICIPAL HOSPITAL, MISKOLC;  
LABORATORY OF CYBERNETICS, JÓZSEF ATTILA UNIVERSITY, SZEGED

## Computing methods in medicine

A. GAÁL

In this paper the mathematical problems of medicine and biology, as well as the importance and possibility of development of biomathematics were shown.

Those parts of medicine are briefly described, in which the computers — being very useful technical instruments of our age — can help very much both the hospital attention and research.

We have demonstrated the most suitable group (team) for solving the problems in biology and medicine by an example.

We have mentioned some error and the work to do in our country; in organization.

MEDICAL UNIVERSITY, PÉCS

## A model of receptors and receptor fields and their simulation by computer

A. TÖRÖK, P. HUNYA, CS. FAJSZI

Receptors transmitting the environmental changes may be examined like black boxes, at the input of which the stimulus, at the output the spike-series can be measured. The physical or chemical change of the environment is called the stimulus. The examinations were directed towards the problem of coding intensity of the information in the receptor as a function of the stimulus intensity.

Sense organs can be generally interpreted as sets of elementary microreceptors. A characteristic threshold-value called resting threshold is attributed to each microreceptor. These threshold-values follow a probability distribution pattern. It is known that a microreceptor reacts with firing only to an adequate external stimulus corresponding to, or exceeding the threshold value. This provides the sense organ i.e. the microreceptor with varying amounts of information depending on the intensity of the stimulus and the length of time.

The firing frequency depends on the intensity of the external stimulus and on the length of time. Mathematically one can approximately describe how the stimulus-threshold changes in time from the beginning of firing. This is called instantaneous threshold. With the help of this function we can explain the experimental fact that by changing the stimulus intensity also the frequency of the excitatory impulse burst is changed, i.e. according to which mathematical regularity is to be found in the change of the amount of information coded into an excitatory impulse burst by the instantaneous threshold of the microreceptors.

The functioning of the receptor was programmed on a computer at the Laboratory of Cybernetics, József Attila University. At the stimulation of the field the computer produced the distribution of stimulus-thresholds and examined the spike-series of each receptor.

DEPARTMENT OF PHYSIOLOGY, MEDICAL UNIVERSITY;

LABORATORY OF CYBERNETICS, JÓZSEF ATTILA UNIVERSITY;

BIOLOGICAL RESEARCH INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, SZEGED

### **Computer aided EEG analysis by pattern recognition based on the auditive system**

F. SEBESTYÉN

The subject of this paper is the simulation of the activity of the electroencephalographer, that is the computer-aided analysis of the EEG by pattern recognition. The EEG is unduely treated as a two-dimensional pattern by an algorithm based on visual perception. It seems to be more promising to apply algorithms based on the auditive system.

The sound pressure changing in time, impinging the auditive system shows, on an abstract context, close analogy to the biopotentials of EEG. Both of them are physical quantities changing in time.

It has a meaning to speak about pattern recognition in relation both of hearing and vision, though the latter is more familiar to us. The prominent difference between the two is that pattern recognition by the auditive system does not need any background of the curve as does need the visual system. The advances of this are the followings:

- a) The steps of the algorithm are much less compared to the visual case for the lack of background;
- b) there are no difficulties with the variation of position, orientation and size.

It is quite natural to check the basic supposition by actual hearing of the EEG. For this reason the EEG potentials have to be speeded up. A 1 to 40 ratio can be easily made by the tape recorder Type 7001 of the Brüel et Kjaer Comp. The original rates of the components are saved by this procedure. But the cardinal thing is the overall sensation. The centre of the "alpha"-rhythm, for example is a sound of 400 cps. According to Békésy's results two cycles of a signal are enough to give a pitch sensation.

Hopefully the analysis by hearing will give us some useful informations with diagnostical value in itself. By using a stereo system it seems to be possible to detect asymmetries between the two hemispheres by differences in amplitude, frequency and phase. Further direct advance of the speeding up process would be that the acoustical measuring equipments are at hand for wide analysis. The work will be promoted in each of the directions mentioned.

COMPUTING CENTRE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

### **On the frequency dependence of acoustically evoked potentials and its modelling**

O. FEHÉR, P. HUNYA

Click evoked potentials were off from the acoustic cortex of anaesthetized cats. On increasing the frequency of stimulation the amplitude of these potentials shows a characteristic diminution. As an explanation for this frequency dependence the authors presume that in consequence of each impulse always the same proportion of the transmitter substance is liberated from the thalamocortical terminals. In case of repetitive stimulation the released quantity of transmitter at each impulse

approaches a limit characteristic for the given frequency and so do the amplitudes of the evoked potentials. As a model for these events the functioning of a condenser is supposed to be adequate. This condenser is charged from a battery ( $U_0$ ) through a resistance  $R_1$  on voltage  $U_0$  and discharged by momentary short-circuiting through resistance  $R_2$ . At appropriate values of the time constants of the charging and discharging circuits and those of the durations of short-circuiting, the model produced curves of frequency dependence very like to those obtained in physiological experiments on the cat's acoustic cortex. The functioning of the model was simulated by a Minsk 22 computer. The authors assume that their model reflects adequately the dynamics of transmitter synthesis and liberation playing role in the production of the acoustically evoked potentials.

DEPARTMENT OF ANIMAL PHYSIOLOGY;  
LABORATORY OF CYBERNETICS,  
JÓZSEF ATTILA UNIVERSITY, SZEGED

### **The approach of the transfer functions of the retina**

GY. BENEDEK, I. GYÖRI, I. MADARÁSZ

Averaged responses obtained in different points of the visual system: retina, optic nerve and visual cortex, evoked by short flashes of light, have been analysed on the basis of methods known from the control theory. The experiments were carried out on cats after pretrigeminal transection. For the analysis of evoked responses, amplitude-phase-frequency characteristics, figuring the relation of Fourier integrals of output and input signals in a complex plane, has been taken. The investigations were made in the region of linear responses. After calculating the characteristics of physiological evoked potentials, led from different points, transfer functions were determined, also after giving toxic doses of ouabain.

DEPARTMENT OF PHYSIOLOGY, MEDICAL UNIVERSITY, SZEGED

### **Computers now and in the future for clinical purposes**

M. HORVÁTH

The pattern-analysis of bioelectrical signals, the cycleanalysis of flow parameters, the automatic computation of the cardiac output and circulating blood volume, the computerized testing of the respiratory function were discussed on the basis of home works. Within the scope of the pattern-recognizing methods the computerized nuclear scintigraphy was dealt with, stressed its great diagnostic advantage.

Finally a review on the medical adaptation of computers till now was presented and in connection with the matter, the organisation problems of software programs in the future were discussed.

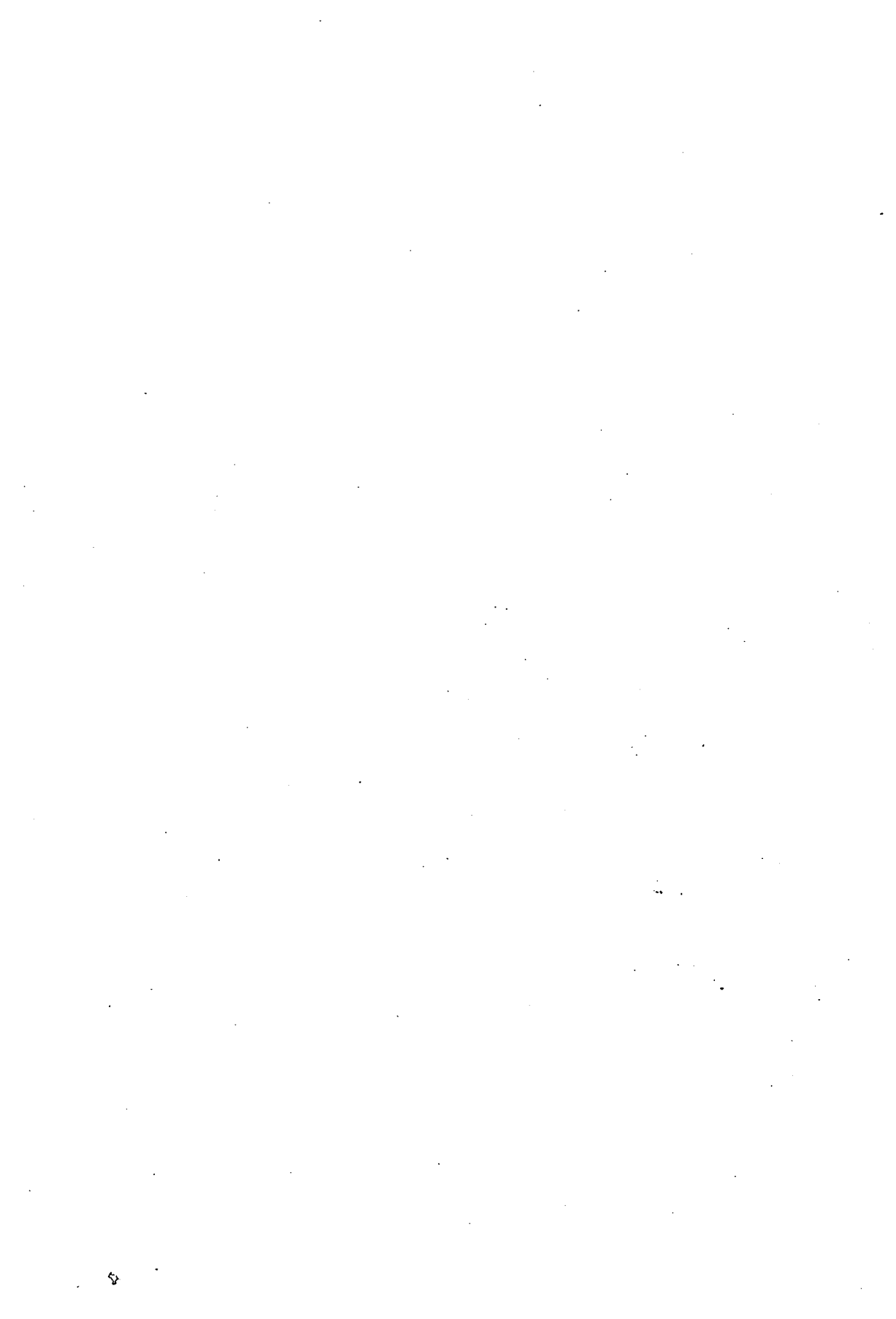
STATE HOSPITAL OF CARDIOLOGY, BALATONFÜRED

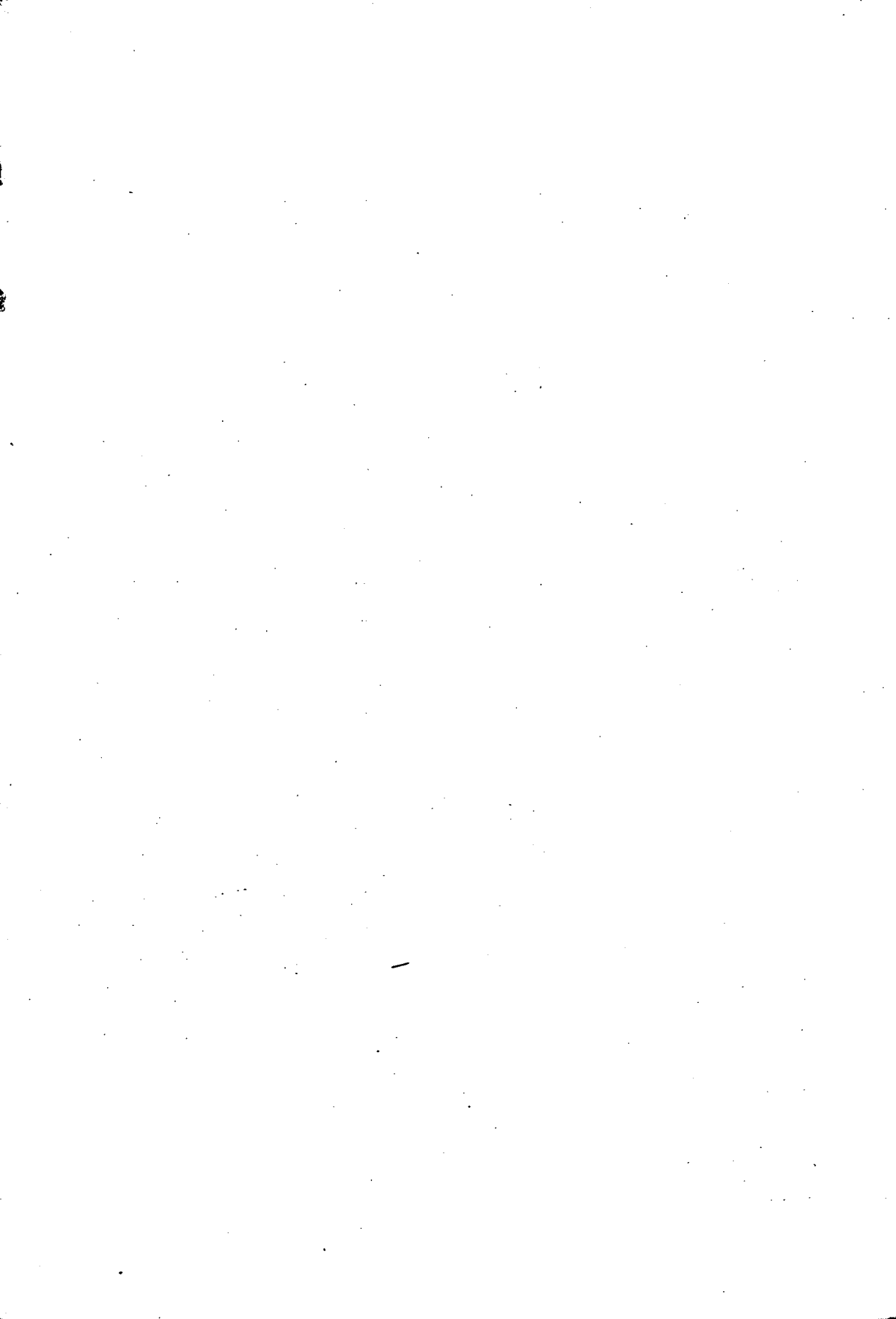
*(December 1971, Szeged, Hungary)*











## INDEX—TARTALOM

<i>R. Péter</i> : Die prinzipielle Ausschaltbarkeit der rekursiven Prozeduren aus der Programmierungssprache Algol 60 .....	219
<i>J. Demetrovics</i> : О мощностях множеств предполных классов в предельных логиках .....	233
<i>B. Papp</i> : Procédé pour déterminer les formes normales minimales des fonctions booléennes, en utilisant les règles de minimisation de la fonction de coût .....	241
<i>P. Dömösi</i> : On the semigroup of automaton mappings with finite alphabet .....	251
<i>W. Kämmerer</i> : Zu den Ungleichungen der Informationstheorie .....	255
<i>D. Muszka und E. Vida</i> : Verkehrskybernetik I: Automatische Bremse .....	257
<i>L. Iliev</i> : Sur des problèmes de formation et de recherche en informatique .....	263
Резюме статей первого тома Acta Cybernetica .....	273
Outlines of the lectures delivered at the colloquium on "Cybernetical and Computing Methods in Medicine and Biology" (December 1971, Szeged, Hungary) .....	283

Felelős szerkesztő és kiadó: Kalmár László  
 A kézirat a nyomdába érkezett: 1971. december hó  
 Megjelenés: 1972. december hó  
 Példányszám: 1000. Terjedelem: 6,5 (A/5) ív  
 Készült monószedéssel, íves magasnyomással  
 az Msz 5601-90 és az Msz 5602-55 szabvány szerint  
 72-6605—Szegedi Nyomda